20 Jahre Gottlob-Frege-Zentrum Wismar

11. November 2020

Ingolf Max[1]

Inhaltliche versus formale Arithmetik.

Freges Kampf gegen Thomaes Schachanalogien

[1] University of Leipzig, Department of Philosophy, Section of Logic and Theory of Science, Beethovenstraße 15, 04107 Leipzig, max@uni-leipzig.de, http://www.sozphil.uni-leipzig.de/cm/philosophie/mitarbeiter/ingolf-max/

1. Freges Logizismus: Stichpunkte zu einem bewundernswerten Programm und seinem Scheitern

Was ist **das logizistische Programm Freges**?

- **vollständige Reduktion von** (zumindest) **der Arithmetik auf „reine", aber immer inhaltlich verstandene Logik**
- **Philosophisch** bzw. **kant**isch paraphrasiert: lückenloser Nachweis, dass **die Arithmetik eine analytische Wissenschaft** ist bzw. dass ausnahmslos **jede arithmetische Gleichung analytisch wahr** ist.

Was heißt **analytisch wahr** für **Frege**?

- Es muss gelingen den Begriff **Zahl** – insbesondere der Begriff jeder einzelnen natürlichen Zahl – und die **arithmetischen Operationen** in **inhaltlich verstandenen logischen Begriffen** – **nicht** implizit im Sinne **Hilbert**s oder **Peano**s mittels einer rein formalen **Axiomatik** – **direkt (explizit) zu definieren**. Dazu gehört die logische Definition der Zahl 0 und der Nachfolgefunktion $n + 1$. Auf diese Weise wird sich dann ausnahmslos jede Gleichung in die Sprache der Logik übersetzen zu lassen.

- Es muss gelingen **diejenige formale Sprache**, diejenige Logik, diejenige ***Begriffsschrift*** zu erfinden, die es erlaubt, **jeden arithmetischen Beweis** in einen **rein logischen Beweis** zu überführen.
- Die Begriffsschrift umfasst
  (1) unbewiesene, aber im Sinne **Frege**s auf jeden Fall (logisch) wahre Grundgesetze und
  (2) Schlussregeln.

Der Logizismus ist damit **ein reduktionistisches Programm**, wobei **die Arithmetik** vollständig auf **Logik** reduziert werden soll.

Carnap 1931, 91 f.:

> Als "**Logizismus**" wird die Auffassung bezeichnet, daß die Mathematik auf Logik zurückführbar, also nichts anderes als ein Teil der Logik sei. Diese Auffassung ist von **Frege** (1884) zum erstenmal vertreten worden. Die englischen Mathematiker **A. N. Whitehead und B. Russell** haben in dem großen Werk "Principia Mathematica" einen systematischen Aufbau der Logik und der aus ihr entwickelten Mathematik gegeben. Wir wollen **die These des Logizismus** in zwei Teilthesen aufspalten, die nacheinander erörtert werden sollen: **1. die mathematischen Begriffe sind aus den logischen Begriffen ableitbar**, und zwar durch **explizite Definitionen**; 2. **die mathematischen Sätze sind aus den logischen Grundsätzen ableitbar**, und zwar durch **rein logische Deduktionen**.

2. Eckdaten zu Frege, seinem Programm und Hinweise auf seine Kritik an der durch Schachanalogien gestützten formalen Arithmetik

- 8. November 1848, geboren in Wismar
- 1879: ***Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*** [**BS**], Halle a. S.: Louis Nebert
  - Vorleistung zu **Carnap**s Punkt 2
- 1884: ***Die Grundlagen der Arithmetik*** [**GA**], Breslau: Wilhelm Koebner
  - Frege liefert die rein logische Definition des Begriffs natürlich Zahl.
- 1884–1892: u.a.
  - 1891: ***Function und Begriff*** [**F&B**]
  - 1892a: ***Über Sinn und Bedeutung*** [**S&B**]
  - 1892b: ***Über Begriff und Gegenstand*** [**B&G**]
- **Frege** glaubt damit alle Bausteine zur Realisierung seines Programm zusammen zu haben.

- 1. Oktober 1895 bis 7. November 1903: **überlieferter Briefwechsel mit David Hilbert**
  - **Frege** akzeptiert die aus seinen Augen **explizit zu definierenden Begriffe** – wie den Begriff **Zahl** – mittels **impliziter Definitionen**, d.h. durch die Angabe einer **rein syntaktischen axiomatischen Basis** (**Axiome** und **Schlussregeln**) **nicht**.
- 1893: ***Grundgesetze der Arithmetik Band I*** [**GGA I**], Jena: Pohle
- 16. Juni 1902: Brief von **Russell** an **Frege** („**Russell-Antinomie**", entdeckt 1901 im Kontext der Beschäftigung mit der ersten **Cantorschen Antinomie von 1897**)
- 1903: ***Grundgesetze der Arithmetik Band II*** [**GGA II**], Jena: Pohle
  - Auseinandersetzung mit **Carl Johannes Thomae** (11. Dezember 1840 Laucha an der Unstrut – 1. April 1921 Jena = **Freges Kollege in Jena**) [auch **Heinrich Eduard Heine** (18. März 1821 Halle/Saale – 21. Oktober 1881 Hallee/Saale) & **Eberhard Illigens** (u.a. *Die unendliche Anzahl und die Mathematik* 1893)].

- Beeindruckend ausführliche Auseinandersetzung mit umfassender Kritik an einer Vielzahl von **Analogien zum Schach**: §§ 71 (**Illigens**), 88–97, 100, 102, 103, 106, 109–112, 114, 118, 121, 122, 132.

- 1906–1908: Kontroverse mit **Thomae** in den ***Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung*** im Anschluss an Band 2 der *Grundgesetze der Arithmetik* (GGA II)
  - 1906a **Thomae**: Gedankenlose Denker. Eine Ferienplauderei („Geschrieben in den Hundstagen des Jahres 1906“)
  - 1906 **Frege**: Antwort auf die Ferienplauderei des **Herrn Thomae**
  - 1906b **Thomae**: Erklärung (11. November 1906)
  - 1908a **Frege**: Die Unmöglichkeit der **Thomae**schen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen
  - 1908 **Thomae**: Bemerkung zum Aufsatze des **Herrn Frege**
  - 1908b **Frege**: Schlußbemerkung

- 1918/19–1923: Neuer Anlauf zum **Logizismus**
    - 1918/19: ***Der Gedanke*** **(Aussagenvariablen)**
    - 1918/19: ***Die Verneinung*** **(1-stelliger Satzoperator)**
    - 1923: ***Das Gedankengefüge*** **(2-stellige Satzoperatoren)**
    - **Nachlass** **(Fragment zu Quantoren)**
- 26. Juli 1925, gestorben in Bad Kleinen

3. Freges Kritik an der Konzeption einer formalen Arithmetik vor dem Beginn des Briefwechsels mit Hilbert (1895)

In den **GGA I** (**1893**) bezieht sich **Frege** auf **E. Heine** (1872) als einen Vertreter der **formalen Arithmetik**:
„**Ich** stelle mich bei **der Definition** auf **den rein formalen Standpunkt**, indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne, sodass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht." **E. Heine**, Die Elemente der Functionslehre, in *Crelle's Journal*, Bd. 74 (1872), S. 172–188, hier S. 173

Freges Reaktion im **Vorwort GGA I, XIII**:

- Derzeit die früheste mir bekannte Stelle, in der **Frege** sich im Kontext der Kritik am „**formalen Standpunkt**" auf die aus dessen Perspektive akzeptablen **Analogien zum Schachspiel** bezieht:

„Ungünstig für **mein** Buch ist auch **die weit verbreitete Neigung**, **nur das Sinnliche als vorhanden anzuerkennen**. Was nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, sucht **man** zu leugnen oder doch zu übersehen. Nun sind **die Gegenstände der Arithmetik, die Zahlen unsinnlicher Art**; wie findet **man** sich damit ab? Sehr einfach! **Man** erklärt **die Zahlzeichen** für **die Zahlen**. In **den Zeichen** hat **man** dann **etwas Sichtbares**, und das ist ja doch die Hauptsache. Freilich haben **die Zeichen** ganz andere Eigenschaften als **die Zahlen selbst**; aber was thut's? **Man** dichtet **ihnen** die gewünschten Eigenschaften durch **sogenannte Definitionen [Kritik an Hilbert]** einfach an. Wie freilich **eine Definition** statthaben kann, wo gar kein Zusammenhang zwischen **Zeichen** und **Bezeichnetem** in Frage kommt, ist ein Räthsel. **Man** knetet **Zeichen** und **Bezeichnetes** möglichst ununterscheidbar zusammen; je nachdem es erforderlich ist, kann **man** dann die Existenz mit Hinweis auf die **Greifbarkeit** behaupten, oder **die eigentlichen Zahleigenschaften** hervorkehren. Zuweilen scheint **man die Zahlzeichen** wie **Schachfiguren** anzusehen und **die sogenannten Definitionen** als **Spielregeln**. **Das Zeichen**

bezeichnet dann **nichts**, sondern ist **die Sache selbst**. Eine Kleinigkeit übersieht **man** freilich dabei, dass **wir** nämlich mit ‚$3^2 + 4^2 = 5^2$' **einen Gedanken ausdrücken**, während **eine Stellung von Schachfiguren nichts besagt**. Wo **man** sich mit solchen Oberflächlichkeiten zufrieden giebt, ist für eine tiefere Auffassung freilich kein Boden."

- Man beachte, dass **Frege** 1893 mit Bezug auf **Heine** „**die weit verbreitete Neigung**" verwendet.

Die **Analogien** sind:

1. **Zahlzeichen** – **Schachfiguren**
2. **(sogenannte) Definitionen** – **(Schach-)Spielregeln**

Mit Blick auf die späteren „Grundlagen der Geometrie" (1899) von **Hilbert** könnten wir sagen, dass **die Gesamtheit aller Spielregeln** **die (formale) Bedeutung** **der Spielfiguren** bestimmt.

- Nebenbemerkung: Es ist erstaunlich, dass sich z.B. in **Franz von Kutscheras** Monografie „Gottlob Frege. Eine Einführung in sein Werk" nicht ein einziger Verweis auf „**Schach**" findet. (**Forschungsdesiderat!**)

Beispiel: **klassische Aussagenlogik**

Die formale Bedeutung der (undefinierten) **Grundzeichen** „¬“ (Negation) und „→“ (Implikation) und des Begriffs **Theorem** ist für jede konkrete Logik aus **der Äquivalenzklasse der möglichen Axiomatisierungen der klassischen Aussagenlogik** durch die **vollständige** Angabe einer **axiomatischen Basis** – (a) Axiome / Postulate / Grundgesetze und (b) Grundschlussregeln **implizit definiert**.

- **Philosophisch** wird hier **ein holistischer Standpunkt** eingenommen. **Implizite Definitionen** sind **nicht lokale Bestimmungen**, **sondern ganzheitliche Bestimmungen** durch die Gesamtheit aller Regularien.
- **Die formale Bedeutung eines Schachspringers** wird **nicht lokal** dadurch angegeben, wie **der Springer** (auf einem leeren Brett?) ziehen kann, **sondern** durch **alle anderen Schachspielregeln** gleichermaßen bestimmt. Z.B. kann **ein Springer** nicht ziehen, (1) wenn er gefesselt ist, (2) wenn er ein Feld betreten möchte, welches durch eine eigene Figur besetzt ist und (3) wenn der farbgleiche König im Schach steht und der „Springerzug“ das Schachgebot nicht aufhebt.

- Doch selbst **explizite Definitionen** durch **Gleichsetzungen** können **formal** bzw. **inhaltlich** aufgefasst werden. In der **klassischen Aussagenlogik** können wir z.B. mittels „¬“ und „→“ die Konjunktion „∧“ definieren:

$$(A \wedge B) =_{df} \neg(\mathrm{A} \rightarrow \neg\mathrm{B})$$

- Diese Definition können wir **ohne** Blick auf die logische Wahrheit dieser Definitionsgleichung als **Abkürzungsdefinition** auffassen. D.h., wir können an jeder beliebigen Stelle unserer formalen Sprache Ausdrücke der Formen „$(A \wedge B)$“ und „$\neg(\mathrm{A} \rightarrow \neg\mathrm{B})$“ gegeneinander austauschen (**reine Substitution**).
- Wir können jedoch auch – und dies ist **Frege**s Standpunkt – fordern, dass wir nur dann solche universellen Substitutionen durchführen dürfen, wenn wir bereits wissen, dass die Definitionsgleichung eine **logische Wahrheit** darstellt.

- Wir können dazu z. B. die später von Peirce und Wittgenstein entwickelte **Methode der Wahrheitstabellen** verwenden:

$(A$	$\wedge$	$B)$	$=$	$\neg$	$(A$	$\rightarrow$	$\neg$	$B)$
W	**W**	W	**W**	**W**	W	F	F	W
W	**F**	F	**W**	**F**	W	W	W	F
F	**F**	W	**W**	**F**	F	W	F	W
F	**F**	F	**W**	**F**	F	W	W	F

- Analog können wird die Gleichung $\mathbf{7+5=12}$ – Kants Beispiel für ein **synthetisches Urteil a priori** – nur dann für Substitutionen verwenden, wenn wir zeigen können, dass $\mathbf{7+5=12}$ – nach **Frege** im Gegensatz zu **Kant** – relativ zu einer Übersetzung **logisch** (**analytisch**) **wahr** ist.
- Dazu müssen die Ausdrücke „7“, „5“ und „12“ logisch als Eigennamen definiert werden, die nach **Frege** die entsprechenden Zahlen 7, 5 und 12 bezeichnen. Außerdem muss die arithmetische Operation „+“ definiert werden. Schließlich muss sich diese Übersetzung in **Frege**s Logik als **logisch wahr** erweisen und damit **analytisch** sein.

4. Einige Impressionen aus Freges Kontroverse mit Thomae in den GGA II

- Der erste Verweis auf Schach findet sich mit Blick auf **Illigens** bereits in GGA II, § 73, S. 83, in Fußnote 36: „Es besteht freilich auch eine Meinung, nach der **die Zahlen** **weder** **Zeichen** sind, **die etwas bedeuten** [**empiristische Auffassung z.B. bei Mill**], **noch auch** **unsinnliche Bedeutungen solcher Zeichen** [**Freges Auffassung]**, sondern **Figuren, die nach gewissen Regeln gehandhabt werden**, etwa wie **Schachfiguren**. Danach sind **die Zahlen** weder **Hülfsmittel der Forschung** noch **Gegenstände der Betrachtung**, sondern **Gegenstände der Handhabung**. Das wird später zu prüfen sein.“
- In der Auseinandersetzung mit der von **Frege** strikt **abgelehnten formalen Arithmetik** in **GGA Band II, III. Die reellen Zahlen. 1. Kritik der Lehren von den Irrationalzahlen. c) Die Theorien des Irrationalen von E. Heine und J. Thomae, §§ 86–137**, finden sich erstaunlich viele Bemerkungen zu den vor allem von **Thomae** verwendeten **Schachanalogien**.

Hier einige Beispiele:

Beispiel 1: GGA II, § 88, S. 97 f.

Thomae schreibt: „**Die formale Auffassung der Zahlen** zieht sich bescheidenere Grenzen als die logische. Sie fragt nicht, **was sind und was w[s]ollen die Zahlen** [**Dedekind** 1888], sondern **sie** fragt, was braucht **man** von **den Zahlen in der Arithmetik**. **Die Arithmetik** ist nun für **die formale Auffassung ein Spiel mit Zeichen**, die **man** wohl **leere** nennt, womit **man** sagen will, dass **ihnen (im Rechenspiel) kein anderer Inhalt** zukommt, als der, der ihnen in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber **gewissen Verknüpfungsregeln** (**Spielregeln**) beigelegt wird. Aehnlich bedient sich d**er Schachspieler seiner Figuren**, **er** legt **ihnen** gewisse Eigenschaften bei, die **ihr Verhalten im Spiel** bedingen, und **die Figuren** sind **nur das äussere Zeichen für dies Verhalten**. Zwischen **dem Schachspiel** und **der Arithmetik** findet freilich **ein bedeutsamer Unterschied** statt. **Die Schachspielregeln** sind **willkürliche**, **das System der Regeln der Arithmetik** ist ein solches, dass **die Zahlen** mittels **einfacher Axiome** [Auffassung ist unverträglich mit der Auffassung von **Hilbert**!] auf **anschauliche Mannichfaltigkeiten**

bezogen werden können und **uns** in Folge dessen **wesentliche Dienste in der Erkenntnis der Natur** leisten.“ [*Elementare Theorie der analytischen Functionen einer komplexen Veränderlichen* (1898), S. 3.]

Mit andern [**Frege**s] Worten:

„Für **die Arithmetik** kommen nur **die Regeln** in Betracht, nach **denen die arithmetischen Zeichen** zu behandeln sind, **nicht aber**, was **diese bedeuten**. Als Unterschied von dem **Heine**schen Standpunkte könnte **man** bemerken, dass **Thomae die Frage nach dem Wesen der Zahlen** als für **die Arithmetik unerheblich** ablehnt, während **Heine** sie dahin beantwortet, dass **die Zahlen Zeichen** seien. Da aber **Beide** darin übereinkommen, dass **die Arithmetik** sich mit **Zeichen** zu beschäftigen habe, so ist dieser Unterschied unwesentlich. **Heine** nennt diese **Zeichen Zahlen**; **Thomae** dagegen scheint unter „Zahl“ etwas zu verstehen, dessen Wesen für **die Arithmetik** nicht in Betracht komme, das also wohl kein Zeichen ist, sondern etwa **die [formale] Bedeutung eines Zeichens**. Da **er** aber auch von **der [formalen] Bedeutung der Zahlen** spricht, so stempelt **er sie** doch wieder zu **Zeichen**, sodass eine folgerechte

Redeweise hier wohl vermisst wird. **Diese [inhaltlichen] Bedeutungen der Zahlzeichen**, die von **Thomae** zwar angenommen, aber als ausserhalb des Rahmens **der Arithmetik** liegend angesehen werden, haben **wir** immer Zahlen genannt. **Wir** sehen also, dass **diese eigentlichen Zahlen** oder **Grössenverhältnisse** nach **diesem Mathematiker** von **der Arithmetik** auszuschliessen sind. So haben **wir** denn hier **eine eigenthümliche Arithmetik**, gänzlich verschieden von **derjenigen**, **die als ihre Gegenstände die eigentlichen Zahlen** betrachtet, und die **wir** zum Unterschiede von **der formalen inhaltliche Arithmetik** nennen wollen. **Wir** werden demnach wohl annehmen dürfen, dass **Cantor** **auf dem Boden der inhaltlichen**, **Heine** und **Thomae** dagegen auf **dem der formalen Arithmetik** stehen. Der Unterschied ist **tief einschneidend**. Freilich wird **ein künftiger Geschichtsschreiber** vielleicht feststellen können, dass es **auf beiden Seiten an der folgerechten Durchführung fehlt**, wodurch der Gegensatz doch wieder etwas von seiner Schärfe verliert.“

- Wie lauten **die gegenwärtigen Positionen** dazu?

Beispiel 2 [Formales vs. Inhaltliches]: GGA II, § 89, S. 98 f.:

Was mag nun der Grund sein, **das Formale dem Inhaltlichen** vorzuziehen?

Thomae antwortet:

„**Der formale Standpunkt** hebt **uns** über **alle metaphysischen Schwierigkeiten** hinweg, das ist der Gewinn, den **er uns** bietet.“ [ebenda]

Die Schwierigkeiten, von denen hier die Rede ist, mögen wohl die sein, die **wir** bei der Betrachtung von **Cantors Theorie** kennen gelernt haben, nämlich **die eigentlichen Zahlen zu fassen** und **ihr Vorhandensein nachzuweisen**. **In der formalen Arithmetik** **brauchen** **wir die Spielregeln** **nicht** zu begründen; **wir stellen sie eben einfach auf**. **Wir** **brauchen nicht** nachzuweisen, dass es Zahlen von gewissen Eigenschaften gebe; **wir** führen eben **Figuren** ein, **für deren Behandlung wir Regeln geben**. **Diese Regeln** betrachten **wir** dann **als Eigenschaften der Figuren** und können so Dinge von gewünschten Eigenschaften — scheinbar wenigstens — willkürlich schaffen. Dass **wir** damit zunächst wenigstens geistige Arbeit sparen, liegt auf der Hand. **Thomae** bringt zwar **die willkürlichen Regeln**

des Schachspiels in Gegensatz zu **den Regeln der Arithmetik**, welche bewirken, dass **die Zahlen** in der Erkenntnis der Natur wesentliche Dienste leisten können; aber dieser Gegensatz tritt erst hervor, wenn es sich um **Anwendungen** handelt, wenn **wir den Boden der formalen Arithmetik verlassen**.

Blicken **wir** über **deren Grenzen** nicht hinaus, so erscheinen **uns ihre Regeln** so willkürlich wie **die des Schachspiels**. Allerdings kann **jene Anwendbarkeit** kein Zufall sein; aber **wir** entbinden **uns in der formalen Arithmetik** davon, Rechenschaft zu geben, **warum wir die Regeln grade so und nicht anders aufstellen**.

Beispiel 3 [Anwendung]: GGA II, § 91, S. 100 f.

Während in **der inhaltlichen Arithmetik die Gleichungen und Ungleichungen Sätze** sind, **die Gedanken ausdrücken**, sind **sie in der formalen** zu vergleichen **den Stellungen von Schachfiguren**, **die nach gewissen Regeln verändert werden ohne Rücksicht auf einen Sinn**. Denn, wäre **ein Sinn** zu beachten, so könnten **die Regeln nicht willkürlich** aufgestellt werden; **sondern sie müssten** so eingerichtet werden, dass aus **Formeln, welche wahre Gedanken ausdrückten**, **immer nur solche Formeln abgeleitet werden könnten**, **welche ebenfalls wahre Gedanken ausdrückten**. Damit wäre **der Standpunkt der formalen Arithmetik** verlassen. **Auf diesem** werden hingegen **die Regeln für die Handhabung der Zeichen ganz willkürlich** aufgestellt. **Erst nachträglich** kann **man** fragen, ob **den Zeichen ein mit den vorher aufgestellten Regeln verträglicher Sinn gegeben werden könne**; aber das liegt schon **ausserhalb der formalen Arithmetik** und wird erst in Frage kommen, wenn **Anwendungen** gemacht werden sollen. Dann aber wird es auch in Betracht kommen müssen; denn **ohne einen Gedankeninhalt wird auch** keine Anwendung möglich sein [Problem Kants!]. Warum kann man von einer Stellung von Schachfiguren **keine Anwendung** machen? Offenbar, weil sie **keinen Gedanken ausdrückt**. Wenn sie das thäte, und wenn einem den Regeln gemässen Schachzuge **der Uebergang von einem Gedanken zu einem andern aus jenem folgenden entspräche**, dann wären auch **Anwendungen des Schachspiels denkbar**. Warum kann man von arithmetischen Gleichungen **Anwendungen** machen? **Nur** weil sie **Gedanken ausdrücken**. Wie könnten wir eine Gleichung **anwenden**, die **nichts ausdrückte**, nichts wäre als eine Figurengruppe**, die nach gewissen Regeln in eine andere Figurengruppe umgewandelt werden könnte**! Nun ist es **die Anwendbarkeit allein**, was die Arithmetik über das Spiel empor zum **Range** einer Wissenschaft erhebt. **Die Anwendbarkeit gehört also nothwendig dazu**. Ist es da nun wohlgethan, das von ihr auszuschliessen, was die Arithmetik erst zu einer Wissenschaft macht?

5. Zur Unversönlichkeit der Gegensätze zwischen Frege und Thomae: Die Kontroverse 1906–1908

Thomae reagiert 1906 mit einer „Ferienplauderei", die er zudem mit „Gedankenlose Denker" überschreibt:

„Wer **eine Arithmetik** auf **eine formale Zahlenlehre** aufbauen will, eine Lehre, die nicht fragt, was sind und was sollen die Zahlen [**Dedekind**], sondern **die** fragt, **was brauchen wir von den Zahlen in der Arithmetik**, dem wird es erwünscht sein, auf **ein anderes Beispiel einer rein formalen Schöpfung des menschlichen Verstandes** hinweisen zu können. Ein solches Beispiel glaubte ich **im Schachspiel** gefunden zu haben. **Die Schachfiguren** sind **Zeichen**, denen **im Spiel** kein anderer Inhalt zukommt, als der ihnen durch **die Spielregeln** zuerteilt wird." [S. 434]

„**Der Inhalt einer Schachfigur**, z. B. des **weißen Damenspringers**, oder **des schwarzen d-Bauern**, wird im **Schachspiel** durch ihr Verhalten gegen die Spielregeln bestimmt." [S. 436]

- <u>Nebenbei bemerkt</u>: Aus **dem schwarzen d-Bauern** kann auch **ein schwarzer Springer** werden (**Bauernumwandlung**), der **<u>weder</u>** **schwarzer Damen-** **<u>noch</u>** **schwarzer Königsspringer** ist!

„In bezug auf **das Schachspiel** habe **ich mich** nun auch, wie **mich Herr Frege** belehrt, stark geirrt. Nach **ihm** gibt es **in diesem Spiele** **<u>keine</u>** **Lehrsätze** **und** **Beweise**. Der Satz: **Turm** und **König** **<u>können</u>** **den feindlichen König** **auf** **jedem Randfelde** **matt setzen**, ist also nur wohl für **meinen** nicht hinreichend logisch geschulten Verstand **ein Lehrsatz**, und sein Beweis **ein Scheinbeweis**. Durch **Frege** erfahre **ich**, daß **die Schachspieler** wohl **Denkarbeit leisten**, aber **<u>keine</u>** **Gedanken** **haben**, sie sind **gedankenlose** **Denker**.“ [S. 436 & Titel]

„Nachdem nun **Frege** „die formale Zahlenlehre ein für allemal abgetan“ hat, und nachdem er erkannt hat, daß auch **sein** Versuch die Zahlen logisch zu begründen (Seite 253. Nachwort) mißglückt ist, so haben wir nun gar keine Zahlen und müssen nach **ihm** zu dem traurigen Schluß kommen

Die Mathematik ist die unklarste aller Wissenschaften.“ [S. 438]

Freges Reaktion 1906

„Es verlangte große Entsagung von **mir**, Wegen nachzugehen, die **ich** **von vornherein als Irrwege erkannte**, nur um im einzelnen nachzuweisen, daß sie **Irrwege** wären, ohne hoffen zu können, aus dieser Beschäftigung mit fremden Gedanken irgend etwas Wertvolles zu erlernen.“ [S. 587]

„**Ich** bin überzeugt, mit **meiner** **Kritik der Thomaeschen formalen Arithmetik** diese für immer vernichtet zu haben, und in **dieser Überzeugung** kann **mich** **die Ferienplauderei des Herrn Thomae** (diese Jahresber. XV S. 434) nur bestärken.“ [ebenda]

„Und wie verfährt **er** [**Thomae**] in dieser Plauderei? **Er** wiederholt **seine** Behauptungen, ohne **meine** Gegengründe auch nur anzuführen. **Meine** Unterscheidungen – z. B. von **Figuren** und **Zeichen**, von **Spiel** und **Theorie des Spiels** – unterschlägt **er** und verdunkelt dadurch das wieder, was **ich** aufgehellt hatte.“ [S. 587]

„§ 93. [GGA II] **Im Rechenspiele** gibt es <u>**weder**</u> **Lehrsätze** <u>**noch**</u> **Beweise**, **noch Definitionen**, wohl aber **in der Theorie dieses Spieles**."

Damit ist ein Teil der **Thomae**schen Ausführungen als Lufthieb gekennzeichnet. Man sollte manchmal fast denken, **Herr Thomae** habe das von **ihm** Bekämpfte gar nicht gelesen.“ [ebenda]

„**Sein** [**Thomae**s] **Hauptfehler** besteht ja darin, daß **er** immer aus **seiner Rolle als Formalarithmetiker** fällt und vieles aus **der inhaltlichen** in **die formale Arithmetik** herübernimmt, was dort hinpaßt wie die Faust aufs Auge, ohne zu merken, daß **die formale Arithmetik** überflüssig ist, wenn sie **die inhaltliche** voraussetzen muß. In der Tat bleibt von der **formalen Arithmetik**, wenn man alles wegnimmt, was aus **der inhaltlichen** stammt, fast nichts übrig als **einige unglaubhafte Behauptungen**.“ [ebenda]

Frege spricht bei **Thomae** von

- „Immer wieder dieselbe Halbheit und Schwächlichkeit des Denkens“;
- „einer Kraft der Verdunklung und Verwirrung“ (beide 549)
- „Es gibt … Menschen, von denen logische Gründe abgleiten wie Wassertropfen von einer Öljacke.“

Thomaes Reaktion 1906

„**Vor 22 Jahren** [1884] hat **mir Herr Frege** im Gespräch unzweideutig zu erkennen gegeben, daß **er mich** für unfähig hält, **seine** tieferen Deduktionen zu begreifen. Jetzt verkündet er dasselbe urbi et orbi.“ [S. 590]

„Eine solche Auseinandersetzung wird nach allen Seiten hin nutzlos sein. **Herrn Frege selbst** zu überzeugen wäre ein aussichtsloses Unternehmen. **Er** geht, wie **er selbst** sagt, an diese Fragen mit einer im voraus feststehenden unfehlbaren Gewißheit heran. **Der Standpunkt der formalen Arithmetik ist falsch**.“ [S. 591]

„**Wir** haben in der Zeit jener Publikation [GdA 1884] freundschaftlich miteinander verkehrt, sind wöchentlich mehrere Male zusammengekommen, aber **er** hat **mich** nicht ein einziges Mal gefragt, was **ich** meine. War **ihm** diese Mühe zu groß? **Ich** halte es für überflüssig, **Frege**s wegen irgend etwas zu sagen, auch fehlt **mir** die Zeit dazu.“

„Diese Zeilen wurden geschrieben, nach Einsicht der ersten vier Seiten der **Fregeschen Streitschrift**. **Ich** bitte die Redaktion um Gewährung von Platz für **meine** Erwiderung, ehe **ich** den Rest der Polemik kenne. **Ich** werde ja auf keinen Fall darauf eingehen, und brauche deshalb das Ende nicht abzuwarten.“ [S. 592]

- **Frege** reagiert nochmals mit der längeren Ausführung „Die Unmöglichkeit der **Thomae**schen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen“.
- **Thomae**: „Daß ich in eine Polemik mit **Herrn Frege** nicht eintreten werde, habe ich bereits mit Angabe von Gründen erklärt.“
- **Freges** „Schlußbemerkung“: „In dem oben stehenden Aufsatze habe **ich** eine Theorie sachlich und ernsthaft bekämpft. Wenn **Herr Thomae** dagegen etwas einzuwenden weiß, so ist es **seine** Pflicht, das zu tun. Damit hinter dem Berge zu halten, dafür gibt es überhaupt keinen stichhaltigen Grund, es sei denn **andauernde Schwäche**. Eine Lehre, die, ernsthaft angegriffen, nicht mehr verteidigt wird, muß nach den allgemeinen Grundsätzen des wissenschaftlichen Betriebes als widerlegt gelten.“

6. Einige Schlussbemerkungen aus heutiger Sicht

- Die Position **der formalen Arithmetik** ist in **die rein syntaktische Form des uninterpretierten Hilbert-Kalküls** eingegangen.
- Es gab bis ca. in die 60er Jahre des 19. Jh. **eine syntaktische Strömung in der Logik**, die mit der zunehmenden Entwicklung **der semantischen Modelltheorie** und **der algebraischen Semantik** koexistierte.
- **Frege**s Konzept einer **inhaltlichen Arithmetik**, wie auch das **philosophische** von **Wittgenstein** (*Tractatus logico-philosophicus* 1922) und **das logische** von **Carnap** (*Die logische Syntax der Sprache* 1934) zeichneten sich durch das „**Zusammendenken**“ von **Syntax** und **Semantik** aus.
- Nach moderner Auffassung sind die **syntaktischen Begriffe Theorem** und **Ableitung** und **die semantischen Begriffe Tautologie/Gültigkeit** und **Folgerung** klar zu unterscheiden, wobei **die semantischen Begriffe** eine Interpretation der **Syntax** liefern.

- Sind alle **Theoreme** auch **Tautologien**, dann sprechen wir von **semantischer Widerspruchsfreiheit** (**Korrektheit**, **Soundness**).
- Gilt das Umgekehrte (alle **Tautologien** sind **Theoreme**), dass sprechen wir von **semantischer Vollständigkeit**.
- Wenn beides zutrifft (**Tautologie gdw. Theorem**) haben wir **Adäquatheit**.
- **Frege**s Behauptung würde in diesem Kontext besagen (auch wenn **er** der Methode **Hilbert**s nichts abgewinnen konnte), dass erst dann eine „echte" Logik vorliegt, wenn wir auch **eine Semantik** für **eine bloße Axiomatierung** angegeben haben. [Gemäß **Frege** müsste **diese Semantik** mitgegeben, „inhärent" sein.]
- In diesem Sinne **die modallogischen Systeme**, die von **Lewis** und **Langford** (*Symbolic Logic* 1934) zunächst nur als **Hilbert-Kalküle ohne Semantik** vorlagen, **keine** **Logiken**. Erst z.B. mit den Modellen gemäß **Kripke** wären sie viel später zu **„echten" Logiken** geworden.

- Eine alternative Sicht – möglicherweise im Sinne **Freges** – wäre, dass **Hilbert-Kalküle** immer schon **untrennbar** mit einer bestimmten **Intuition** bzw. **Intention** verbunden sind und somit **die Illusion eines interpretationsfreien Spiels verschwindet**. **Echtes Schachspiel** beinhaltet **Ziele**!
- Auch wenn **Frege** sich mit Blick auf seine **Logik** gegen die Verwendung von **Schachanalogien** gewendet hat, so ist ihre Berücksichtigung für das **philosophische Verstehen von Logiken höchst attraktiv**. Diesen Schritt ist **der späte Wittgenstein** gegangen.