Hochschule Wismar Gottlob Frege Centre

Beiträge
zum Festkolloquium

20 Jahre Gottlob-Frege-Zentrum

Wismar
November 2020

Heft 03 / 2020

Wismarer Frege-Reihe Wismar Frege Series

Das **Gottlob-Frege-Zentrum** wurde am 7.11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder setzen sich für eine wissenschaftlich begründete, praxisorientierte, moderne und international ausgerichtete Ausbildung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen ein.

Weitere Informationen zum Gottlob-Frege-Zentrum finden Sie im Netz unter

www.hs-wismar.de/frege

bzw. auf der Netzseite

https://www.hs-wismar.de/vernetzung/institutionen-hochschulunternehmen/gottlob-frege-zentrum/

ISSN 1862-1767

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis WFR Heft 03/2020

20 Jahre Gottlob-Frege-Zentrum an der Hochschule Wismar

Einladung

Liebe Fregianer, sehr geehrte Damen und Herren,

aufgrund der aktuellen Situation wird unser Festkolloquium online durchgeführt.

Das Gottlob-Frege-Zentrum der Hochschule Wismar begeht in diesem Jahr sein **20-jähriges Jubiläum.**
Am 8. November 2000 gegründet fühlt es sich einerseits dem Wirken Gottlob Freges als Mathematiker, Logiker und Philosoph verpflichtet und fördert andererseits die mathematische Bildung an der Hochschule und darüber hinaus. Aus Anlass des Jubiläums führen wir ein kleines Festkolloquium durch und möchten hierzu Freunde und Förderer des Gottlob-Frege-Zentrums herzlich einladen. Der Link zum Betreten der Veranstaltung geht Ihnen separat zu.

Festkolloquium
20 Jahre Gottlob-Frege-Zentrum an der Hochschule Wismar

Mittwoch 11. November 2020
16:00 Uhr

- Begrüßung
- Grußwort des Rektors der Hochschule, Prof. Dr. Bodo Wiegand-Hoffmeister
- Grußwort des Bürgermeisters der Hansestadt Wismar, Herrn Thomas Beyer (angefragt)
- Das Gottlob-Frege-Zentrum gestern und heute, Prof. Dr. Dieter Schott, Gründer des Zentrums, Prof. Dr. Uwe Lämmel, Leiter des Zentrums
- Das Projekt einer Roman-Biographie über Gottlob Frege, Dres. Edith und Joachim Framm
- Inhaltliche versus formale Arithmetik. Freges Kampf gegen Thomaes Schachanalogien, Prof. Dr. Ingolf Max, Univ. Leipzig.

Mit freundlichen Grüßen

gez. Uwe Lämmel, Prof. Dr.-Ing.
Leiter Gottlob-Frege-Zentrum

Vorwort des Herausgebers

Bisher wurden die Gründung des Gottlob-Frege-Zentrums im Jahre 2000 sowie das fünfjährige, das zehnjährige und das fünfzehnjährige Jubiläum jeweils mit einem Festkolloquium gefeiert. So sollte es auch im Jahre 2020 sein. Die zu Beginn des Jahres auftretende Corona-Pandemie ließ aber lange keine Vorhersagen zu, in welcher Form dieses Kolloquium stattfinden könnte. Zunächst hofften wir noch darauf, dass es mit einer kleineren Zahl von Teilnehmern an der Hochschule durchgeführt werden könnte. Zur attraktiven Gestaltung hatten wir rechtzeitig prominente Gäste eingeladen. Leider mussten wir uns kurzfristig entschließen, die Veranstaltung online zu organisieren. Die eingeladenen Vortragenden und Teilnehmer konnten sich über einen Link an ihren Rechnern zuschalten und mussten nicht extra anreisen. Wir hofften natürlich, dass die vorhandene Technik zu keinen großen Pannen führen würde. Unter Beachtung der Hygienebestimmungen an der Hochschule betraten Kollege Lämmel und ich am 11.11. etwas vor dem offiziellen Beginn um 16.00 Uhr mit Mundschutz den Raum 312 im IT-Service- und Medienzentrum. Senator Berkhahn kam kurz darauf hinzu. An unseren Plätzen wurde der Mundschutz abgelegt. Außerdem wurde der Raum durch Öffnen von Fenstern regelmäßig belüftet (siehe die Abbildungen 1 und 2).

Abb. 1: *Die zentrale Runde im IT-Service- und Medienzentrum der Hochschule Wismar, von links nach rechts Prof. Schott, Prof. Lämmel und Senator Berkhahn, auf dem Bildschirm aus dem Rektorat zugeschaltet Magnifizenz Prof. Wiegand-Hoffmeister*

Abb.2: *Die Mundschutzvarianten in der zentralen Runde*

Im Hintergrund des Raumes sind unsere Aufsteller mit Informationen zu Gottlob Frege zu erkennen. Unterstützt wurde unsere Arbeit von Frau Baldauf aus der Abteilung Öffentlichkeit, von der auch die Bilder stammen, und von Technikern des IT-Service- und Medienzentrum. Während Prof. Lämmel die Anwesenden und die Gäste herzlich begrüßte, übernahm er auch die Leitung und Regie des Festkolloquiums, das entsprechend dem vorgegebenen Programm erfolgreich ablief. Die Abbildungen 3 und 4 geben Ausschnitte daraus wieder.

Dieter Schott

Abb. 3: *Auf den Bildschirmen sind die Vortragenden Dr. Edith Framm (links) und Prof. Ingolf Max (rechts unten) zu sehen.*

Abb. 4: *Weitere Teilnehmer des Festkolloquiums zeigen sich auf den Bildschirmen und stellen Fragen.*

Eröffnung des Festkolloquiums

Prof. Dr. Uwe Lämmel, Leiter des Gottlob-Frege-Zentrums

Guten Tag allerseits zu unserer kleinen Festrunde aus Anlass des 20-jährigen Bestehens des Gottlob-Frege-Zentrums an der Hochschule Wismar.
Wir haben heute auch einige prominente Gäste hier in unserer kleinen Runde, die ich auch besonders begrüßen möchte. Zum einen ist dies der Rektor unserer Hochschule, Herr Prof. Dr. Bodo Wiegand-Hoffmeister. Ich darf zudem begrüßen, als Vertreter der Hansestadt Wismar, Herrn Senator Michael Berkhahn. Herr Berkhahn war schon öfter bei verschiedenen Anlässen zu Gast an der Hochschule, und ich freue mich, dass Frege ihn überreden konnte, heute wieder zu uns zu kommen und so die Verbundenheit der Hansestadt mit dem Frege-Zentrum auszudrücken. Beide werden anschließend ihre Grußworte vortragen.
Zum Gelingen der heutigen Veranstaltung tragen insbesondere auch unsere Vortragenden bei: Da ist hervorzuheben der Gründer des Gottlob-Frege-Zentrums, Prof. Dr. Dieter Schott, der weitgehend allen anwesenden Gästen bekannt ist und heute die Gelegenheit nutzt, um mit mir zusammen die wichtigsten Ereignisse unserer 20-jährigen Geschichte in Erinnerung zu rufen. Im weiteren Verlauf des Programms werden wir etwas über das Romanprojekt von Herrn Dr. Joachim und Frau Dr. Edith Framm erfahren. Das Ehepaar Framm hat bereits erfolgreich eine Romanbiographie über den Nobelpreisträger Albrecht Kossel geschrieben. Jetzt haben sie vor, über Gottlob Frege eine Romanbiographie zu verfassen. Wir sind alle sehr gespannt darauf und hoffen, dass damit der Name Gottlob Frege noch weiter in die Welt getragen wird. Vielleicht lesen viele Leute dann doch etwas über Gottlob Frege, die sonst nie ein Buch über ihn in die Hand genommen hätten.
Zeitlich den größten Teil unserer Veranstaltung wird der akademische Festvortrag einnehmen. Ich begrüße dazu Herrn Prof. Dr. Ingolf Max von der Universität Leipzig. Der Titel, die verschiedenen Sichten auf die Arithmetik, inhaltlich versus formal, und dann der Kampf der Schachfiguren, einmal auf einer ganz anderen Ebene, ist für mich zunächst, das sage ich ganz ehrlich, etwas unverständlich. Umso mehr macht es neugierig auf den Vortrag.
Ich wünsche uns allen eine interessante und auch unterhaltsame Veranstaltung.

Es folgen nun die Grußworte.

Grußwort zum 20-jährigen Bestehen des Gottlob-Frege-Zentrums

Prof. Dr. Bodo Wiegand-Hoffmeister, Rektor der Hochschule Wismar

Liebe Kolleginnen und Kollegen, verehrte Gäste oder ich kann es vielleicht so zusammenfassen: Liebe Freundinnen und Freunde Gottlob Freges, seines Werkes, seines Schaffens, seiner Logik.

Ich freue mich außerordentlich, Sie hier heute anlässlich eines runden Geburtstages begrüßen zu dürfen, nämlich des 20. Geburtstags des Gottlob-Frege-Zentrums.

Natürlich ist es so, dass wie zu Jubiläen üblich aus diesem Anlass ein Kolloquium stattfindet und im Rahmen dieses Kolloquiums natürlich auch spannende Beiträge auf uns warten. Insofern schafft das Gottlob-Frege-Zentrum etwas, was nicht alle Veranstalter hinbekommen: dass die Vorworte, insbesondere das Grußwort des Rektors, sehr kurz sind. Denn es ist tatsächlich so, dass auch meine Neugier auf die fachlichen Vorträge groß ist. Und je größer die Neugier auf das, was inhaltlich kommt, umso kürzer ist dann eben das Grußwort.

Ein paar Bemerkungen möchte ich doch machen, das ist ja auch wichtig und richtig anlässlich eines runden Geburtstages. In erster Linie möchte ich mich ganz herzlich bei allen Akteuren bedanken, die das Frege-Zentrum am Leben halten, die die Erinnerung an Leben und Werk Gottlob Freges aufrechterhalten und in den Mittelpunkt stellen.

Ganz sicherlich gehört Gottlob Frege zu den großen Wissenschaftlern der Neuzeit, vielleicht kann man sogar sagen: unserer Zeit.

Viele sagen, dass Gottlob Frege der größte Logiker seit Aristoteles, ja praktisch der Begründer der modernen Logik ist. Bedenkt man, wie viele Jahre dazwischen liegen zwischen Aristoteles und Gottlob Frege, dann ist es schon beachtlich, was Gottlob Frege als Lebenswerk uns hinterlassen hat und welche wissenschaftliche Leistung mit seinem Namen verbunden ist.

Insofern ist das, glaube ich, auch ganz logisch.

Jetzt fällt das Wort ‚Logik‘ schon, das gerade die Hochschule Wismar und da vor allen Dingen das Team der Mathematiker sich auf die Fahne geschrieben hat, um das Andenken Freges zu pflegen, ihn zu ehren und letztlich auch zu verdeutlichen, wie wichtig sein Werk eben auch für das ist, was hier an der Hochschule betrieben wird.

Betrieben werden nämlich die wissenschaftlichen Grundlagen, insbesondere des Ingenieurstudiums, aber nicht nur des Ingenieurstudiums. Grundlagen legen, um Mathematik auf höchstem Niveau zu lehren, das wollen die Mitglieder des Frege-Zentrums, und dazu gehört natürlich auch die Vermittlung

logischen Denkens und damit verbunden ist eben wiederum das Werk von Gottlob Frege.
Insofern ist es ganz, ganz toll, was hier auf die Beine gestellt wurde. 20 Jahre, das ist schon eine lange Zeit und so möchte ich allen ganz, ganz herzlich zu diesem Geburtstag gratulieren.
Ich möchte mich ganz, ganz herzlich dafür bedanken, dass Sie das Frege-Zentrum am Leben erhalten und dass sie sich einbringen. Gemeinsam mit der Hansestadt Wismar gibt es daneben auch eine Preisverleihung: den Gottlob-Frege-Preis. Mit diesem Preis zeichnen wir studentische Arbeiten, die des großen Namens würdig sind, aus. Es gibt schon eine enge Verknüpfung zwischen Frege, der Hansestadt Wismar und der Hochschule Wismar. Das ist schon seit mehr als 20 Jahren so. Das wird auch sicherlich so weitergehen. Persönlich werde ich mir größte Mühe geben, dass ich bei den Veranstaltungen des Frege-Zentrums dabei sein kann und möglicherweise nicht nur für ein Grußwort, sondern darüber hinaus. Ich bin jederzeit und stets neugierig weiter zu lernen und mehr zu erfahren über die Themen, die auch mit Frege verbunden sind.
Vielen herzlichen Dank für ihr großes Engagement. Ganz herzlich danken möchte ich auch den Anwesenden. Es sind ja etwas andere Umstände, zu denen uns die Pandemie zwingt, aber inzwischen haben wir uns daran gewöhnt, dass auch solche Formate gut funktionieren.
Ich bin jetzt gespannt auf das, was kommt und wünsche dem Kolloquium einen guten und erfolgreichen Verlauf.

Nochmals vielen herzlichen Dank.

Grußwort zum 20-jährigen Bestehen des Gottlob-Frege-Zentrums

Herr Senator Michael Berkhahn, Hansestadt Wismar

Sehr geehrter Herr Prof. Lämmel, sehr geehrter Herr Prof. Schott,
meine sehr geehrten Damen und Herren,

ich freue mich, dass ich heute in Vertretung unseres Bürgermeisters, Herrn Thomas Beyer, an dem 20-jährigen Jubiläum des Gottlob-Frege-Zentrums teilnehmen darf und überbringe Ihnen die herzlichen Glückwünsche der Hansestadt Wismar.
Obwohl wir uns leider wegen der anhaltenden Pandemie eines besonderen digitalen Formats bedienen müssen, so tut das der Freude über dieses Jubiläum keinen Abbruch.
Wir feiern 20 Jahre eine Struktur, die sich zur Aufgabe gemacht hat, die Erinnerung an Gottlob Frege und damit einhergehend seine für die Wissenschaft und Menschheit wegweisenden Errungenschaften wachzuhalten.
Zunächst wurde sein Schaffen in Deutschland kaum wahrgenommen. Dies geschah zunächst im englischen und amerikanischen Raum, und erst ab ca. 1970 gewannen Gottlob Frege und sein Schaffen immer mehr Beachtung in Deutschland.
Umso schöner ist es, dass auch und gerade hier in Mecklenburg-Vorpommern, in seinem Geburtsort Wismar, durch die Gründer und Verantwortlichen des Gottlob-Frege-Zentrums diese Erinnerung wachgehalten wird.
Der Ursprung dieses Zentrums lag in internationalen Konferenzen zu Gottlob Frege. Die letzte und dritte fand 2013 in Wismar statt. Veranstaltet wurde diese Konferenz an der Hochschule Wismar durch den Gründer des Frege-Zentrums Professor Schott und durch Professor Lämmel. Sie haben den Grundstein gelegt und sind noch heute Garanten dafür, dass dieses Zentrum sich etabliert hat und großes Ansehen genießt.
Nicht nur auf dem Hochschulcampus, sondern auch in der Stadt sind die Erinnerungen an Gottlob Frege sichtbar. So wurde zum Beispiel eine Frege-Büste auf dem Marienkirchplatz aufgestellt. Weiterhin hat die Hansestadt Wismar einen Gottlob-Frege-Preis ausgelobt, der jedes Jahr für die jahrgangsbesten Studierenden der Hochschule zur Verfügung gestellt wird. Und wir unterstützen mit allen Kräften auch die anderen Veranstaltungen des Gottlob-Frege-Zentrums.
Das Gottlob-Frege-Zentrum ist eine Facette, eine wichtige zur Wahrnehmung unserer Stadt.
Eine Einrichtung, die nicht nur die gute Zusammenarbeit mit der Hochschule Wismar dokumentiert, sondern die eben auch unseren Hochschulstandort als

auch die gesamte Stadt repräsentiert; ist ein sehr gutes Aushängeschild der Stadt für unsere Region, aber auch regional und international.

Ich wünsche dem Gottlob-Frege-Zentrum und seinen Akteuren auch für die nächsten 20 Jahre den Elan, die Schaffenskraft, dieses Format stetig weiterzuentwickeln und freue mich auf die damit einhergehende enge Partnerschaft und Zusammenarbeit, und jetzt freue ich mich auf das folgende Kolloquium.

Seien Sie gewiss, wir werden auch weiterhin mit allen unseren Möglichkeiten dieses Gottlob-Frege-Zentrum unterstützen.

Vielen Dank.

Dieter Schott, Uwe Lämmel

20 Jahre Gottlob-Frege-Zentrum – eine kurze Bilanz

Zusammenfassung: Die wichtigsten Stationen in der Entwicklung des Gottlob-Frege-Zentrums (GFZ) der Hochschule Wismar (HSW) werden stichpunktartig genannt und aus heutiger Sicht eingeordnet. Ein Blick auf die Aufgaben des GFZ in der näheren Zukunft beschließt den Beitrag.

1. Vorgeschichte

1984: **2.** Internationale **Frege-Konferenz** der Universität Jena in Schwerin mit Vorträgen zu Freges Werken und ihren Wirkungen. Die Teilnehmer besuchen Erinnerungsstätten von Frege in Wismar und Bad Kleinen. Die Repräsentanten der Stadt Wismar erkennen die internationale Bedeutung von Gottlob Freges Wirken.

Seit **1987: Frege-Wanderungen** mit klassischer Strecke Bad Kleinen-Wismar. Hans Kreher, Bad Kleinen, ist Mitinitiator und Ideengeber (u.a. Zeichnungen).

Ab **1990**: Der Mathematiker *Dieter Schott* [1] liest Philosophie der Mathematik an der Universität Rostock und stößt dabei auf Gottlob Freges Beitrag zur logischen Begründung der Mathematik.

Ab **1994**: Dozenten der HSW fallen schockierende **Mathematik-Vorkenntnisse** von Studienanfängern auf.

1998: 150. Geburtstag von Gottlob Frege im November. Die Stadt Wismar startet mit einer Veranstaltungsreihe zu Ehren von Frege. Die Mathematiker *Wolfgang Eichholz* und *Eberhard Vilkner* (HSW) beginnen mit Aufzeichnungen zur Frege-Tradition.

2000: 2nd UICEE Global Congress on Engineering Education in Wismar. Der Mathematiker *Norbert Grünwald* (HSW) wird auf die internationale Organisation UICEE zur Ingenieurausbildung unter Leitung von Zenon Pudlowski (Melbourne, Australien) aufmerksam. Es gelingt ihm, deren zentrale Tagung zur Jahrtausendwende an der HSW zu veranstalten.

[1] Personen mit kursiv gesetzten Namen gehören zum Gottlob-Frege-Zentrum.

2. Die Gründungsphase

Das Gottlob-Frege-Zentrum (GFZ) der Hochschule Wismar (HSW) wurde auf Initiative von *Dieter Schott* am 7. November 2000 gegründet, um

- die Mathematikausbildung an der HSW zu koordinieren,
- ein ansprechendes Niveau der Mathematikausbildung zu sichern,
- die Leistungen Gottlob Freges in der Öffentlichkeit bekannt zu machen.

Im Weiteren werden für die Struktureinheiten der HSW diese Abkürzungen benutzt:

- FWW: Fakultät für Wirtschaftswissenschaften,
- FIW: Fakultät für Ingenieurwissenschaften.

Bei den Ingenieurwissenschaften wird noch in Bereiche eingeteilt:

- MVU: Maschinenbau, Verfahrens- und Umwelttechnik,
- EuI: Elektrotechnik und Informatik,
- S: Seefahrt.

Zu den Gründungsmitgliedern zählten (siehe Abb.1 von links nach rechts):

- Prof. Dr. *Wolfgang Eichholz* (Mathematiker, FWW),
- Prof. Dr. *Eberhard Vilkner* (Mathematiker, FWW),
- Prof. Dr. *Rolf-Peter Tiedt* (Informatiker, FIW-MVU),
- Prof. Dr. *Hans-Jürgen Albrand* (Mathematiker, FIW-EuI),
- Prof. Dr. *Hans-Jürgen Hochgräfe* (Mathematiker, FWW),
- Dr. *Gabriele Sauerbier* (Mathematikerin, FIW-MVU),
- Prof. Dr. *Dieter Schott* (Mathematiker, FIW-EuI),
- Prof. Dr. *Andreas Kossow* (Mathematiker, FIW-MVU).

und (nicht abgebildet)

- Prof. Dr. *Norbert Grünwald* (Mathematiker, FIW-MVU),
- Prof. Dr. *Heinz-Helmut Bernd*, (Ingenieur, FIW-EuI),
- Prof. Dr. *Uwe Lämmel* (Informatiker, FWW),
- Prof. Dr. *Jürgen Cleve* (Informatiker, FWW).

Einige Mitglieder kamen später hinzu. Einige sind inzwischen im Ruhestand. Neu dabei sind z.B.

- Prof. Dr. *Petra Leitert* (Mathematikerin, FWW),
- Prof. Dr. *Ekaterina Auer* (Mathematikerin, FIW-EuI),
- Prof. Dr. *Ute Schreiber* (Mathematikerin, FIW-S),
- Prof. Dr. *Bernd Wagner* (Wirtschaftsinformatiker, FWW).

Abb. 1: Mitglieder des GFZ im Frege-Raum (Haus 20, Raum 420)

Das GFZ wurde von 2000-2010 von *Norbert Grünwald* und *Dieter Schott* gemeinsam geleitet. Danach hat bis heute *Uwe Lämmel* die Leitung übernommen.

3. Ziele des Gottlob-Frege-Zentrums

Die Ausrichtung des GFZ umfasst die

1) Pflege des **Frege-Erbe**s innerhalb der Gebiete Mathematik, Logik, Informatik, Philosophie, Sprache (Würdigung der Leistungen, Motivation für Grundlagen, Werbung regional und international) [5]
2) Popularisierung der **Logik** (Bedeutung, Anwendungen, Informatik)
3) Popularisierung der **Mathematik** (Image, Bedeutung, Anwendung)
4) Qualifizierung der **Mathematikausbildung** (Technik, Wirtschaft) [3]
   - *Stärkung* (Bedeutung, Zeit, Inhalt, Niveau)
   - interdisziplinäre *Verzahnung* (Einheit, Anwendung, Absprache) [2]
   - *Modernisierung* (neue Methoden, Geräte, Medien, Netze)
   - *Internationalisierung* (Vereinheitlichung, Austauschbarkeit)

4. Das Erbe Gottlob Freges

Es folgt eine Liste unserer Aktivitäten zur Traditionspflege:

- **Frege-Kolloquien** an der HSW (u.a. mit Prof. Gabriel/Jena, Prof. Kienzle/Rostock [4], siehe auch Abb. 3),
- Podiumsdiskussion 2008 zum Frege-Tagebuch [1],
- **Gedenktafel** an der **Frege-Büste** in Wismar: Entwurf, Stiftung 2009 (siehe Abb. 2),
- **Frege-Ausstellung** im Zeughaus Wismar 2010 (siehe Abb. 4 und Abb. 5)
- Hefte in der Wismarer Frege-Reihe (WFR) zu **Frege** (u.a. [1], [4], [7], [9], [12], siehe auch Abb. 5),
- **Frege-Lesekreis** (Leitung Pastor Dr. Brückner) in Wismar 2009 - 2011
- Populärwissenschaftliche Vorträge (siehe auch Abschnitt 8),
- **3. Internationale Frege-Konferenz** an der HSW 2013,
- **Proceedings** zur 3. Frege-Konferenz als Buch 2015 [11],
- Beteiligung an **Frege-Wanderungen** [7]**, Frege-Radwanderung** von Jena nach Wismar 2016 (*Dieter Schott*) [12],
- **Romanprojekt Frege** (Edith u. Joachim Framm, *Dieter Schott*) bis 2025.

Abb.2: Frege-Büste auf dem Marienhof in Wismar mit Gedenktafel

Abb. 3 *Uwe Lämmel* zur Logik auf einem Frege-Kolloquium

Abb.4: Vitrine der Frege-Ausstellung im Zeughaus mit Büchern zu Frege

Abb. 5: Vitrine der Frege-Ausstellung im Zeughaus mit Heften der WFR

5. Frege in der Welt und in die Welt

Das Gottlob-Frege-Zentrum wirkt ständig daraufhin, den Namen und das Werk Gottlob Freges nicht nur an der Hochschule oder in der Hansestadt Wismar bekannt zu machen, sondern wir registrieren auch, wenn andere sich mit Frege beschäftigen oder über Frege berichten.

- Mitarbeit in der Jury für den **Gottlob-Frege- Preis** (Hansestadt Wismar),
- **Buch** zu **Gottlob Frege:** Ein Genius mit Wismarer Wurzeln 2012 ([9], siehe Abb. 7) und weiteres Material, u.a. für Frege-Preisträger [10],
- Frankfurter Allgemeine Zeitung 2013 „Die Menge der Philosophen, die sich selbst verstehen“ zur **3. Internationalen Frege-Konferenz** in Wismar,
- Viele Beiträge über Frege in lokalen Zeitungen
- **Sternstunde Philosophie** in 3Sat: Logisch denken – ein Crashkurs mit Christoph Pfisterer 2020 unter dem Motto „Die moderne Logik ausgehend von Frege…“ (siehe Abb. 6)

Abb. 6: Sternstunde Philosophie mit Freges Bild im Hintergrund

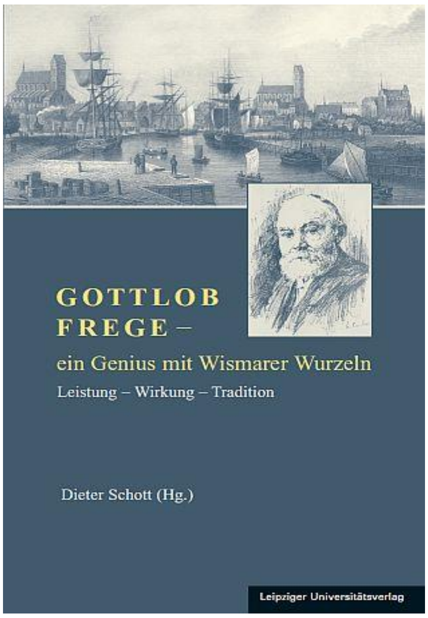

Abb. 7: Der Buchbeitrag des GFZ zur Frege-Tradition

6. Popularisierung der Mathematik

Die Mathematik hat in der Öffentlichkeit einen zweifelhaften Ruf, obwohl sie ein entscheidendes Instrument bei der Gestaltung unseres Lebens ist (Schlüsseltechnologie). Hier sind einige, zum Teil auch zeitlich begrenzte Aktivitäten genannt, um über die Mathematik aufzuklären und die Beschäftigung mit mathematischen Themen zu fördern:

- **Känguru-Wettbewerb:** Auswahl, Übersetzung, Lösungen, Auswertung der Aufgaben und Auszeichnung der Gewinner,
- **Vorträge und Publikationen** zu mathematischen Themen (in Wismar und auswärts),
- **Bücher** Money Puzzles, Counterexamples von Sergiy Klymchuk aus Neuseeland (Gast am GFZ), Übersetzung ins Deutsche und Vertrieb,
- **Lange Nacht** der Wissenschaften, Vorträge im Gymnasium am Goetheplatz, Rostock,
- **Schweriner Wissenschaftstage** 2008: Angebote für Lehrer und Schüler,
- **Förderung** hochbegabter Schüler,
- **Forum** des Vereins Begabtenförderung Mathematik an der HSW 2015.

Abb. 8: Rektor Prof. *Grünwald* (GFZ, rechts) überreicht einen Stiftungsscheck für das Projekt LIMES an Prof. *Schott*, Dr. *Sauerbier* und Prof. *Kossow* (alle GFZ, von links nach rechts)

7. Mathematikausbildung

Die Mathematik-Ausbildung ist ein inhaltlicher Schwerpunkt der Arbeit des Frege-Zentrums. Hier sind Initiativen des GFZ auf diesem Gebiet zusammengestellt:

HSW und Region

- **Brückenkurs** für Studienanfänger (online mit WebCT) 2001,
- **Eingangstests** für Studienanfänger (inzwischen online),
- **Auffrischungskurse** für Studienanfänger,

- **LIMES:** Lern- und Informationszentrum Mathematik für Erstsemester-Studenten (siehe Abb. 8),
- Mitwirkung beim **Projekt EGOS** 2002-2006 (Lernende Regionen, Verzahnung der Bildungsangebote),
- Förderung einer **MINT**-Klasse am Gerhart-Hauptmann-Gymnasium Wismar.

Deutschland

- **IngMath-Workshop**s (Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen (Gründer: *Dieter Schott*): 16 Workshops seit 2001, 5 davon an der HSW, 1 online auswärts (siehe z.B. Abb. 9),
- **Minisymposien** der DMV (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) zur Mathematikausbildung von Ingenieuren,
- **Northern-Light Symposien** zur Mathematik seit 2018,
- **Proceedings** zu Workshops und Symposien (z.B. [6], [13]),
- **WFR** (Wismarer Frege-Reihe) mit Beiträgen zur Mathematik und zum Frege-Erbe seit 2005 mit 43 Heften (siehe auch Abb. 5).

Abb. 9 Teilnehmer des IngMath-Workshops in Osnabrück

Internationale Vernetzung

- **IQN** (Internationale Qualitätsnetze): Hochschulkooperationen 2001-2003 mit Dozentenaustausch (Gastdozenten, z.B. Sergiy Klymchuk, Neuseeland),
- **UICEE:** UNESCO-Organisation zur Ausbildung von Ingenieuren unter Leitung von Prof. Zenon Pudlowski (Melbourne, Australien), GFZ als **Satellite Centre** (Kompetenzfeld Mathematik),
- HSW **UICEE-EHQ** (UICEE European Headquarters) unter Leitung von *Norbert Grünwald* (GFZ) 2004 – 2006,
- UICEE→ **WIETE** seit 2008 (Nachfolgeorganisation des UICEE unter Leitung von Prof. Zenon Pudlowski (Melbourne, Australien), GFZ mit Kompetenzfeld Mathematik,
- **ECEBE** (Organisation zur Ausbildung von Ingenieuren und Wirtschaftsfachleuten in Europa) unter Leitung von *Norbert Grünwald* (GFZ), u.a. *Internationale Konferenz* in Wismar 2008,
- **SEFI MWG** (Europäische Organisation zur Ingenieurausbildung, Arbeitsgruppe Mathematik), u.a. *Internationale Tagung* Wismar 2010, *Dieter Schott* als Kontaktperson für Deutschland bis 2019 (siehe Abb. 10),
- **Vorträge** und deren Leitung**, Publikationen, Gutachten** von Mitgliedern des GFZ auf internationaler Ebene (siehe z.B. [8]).

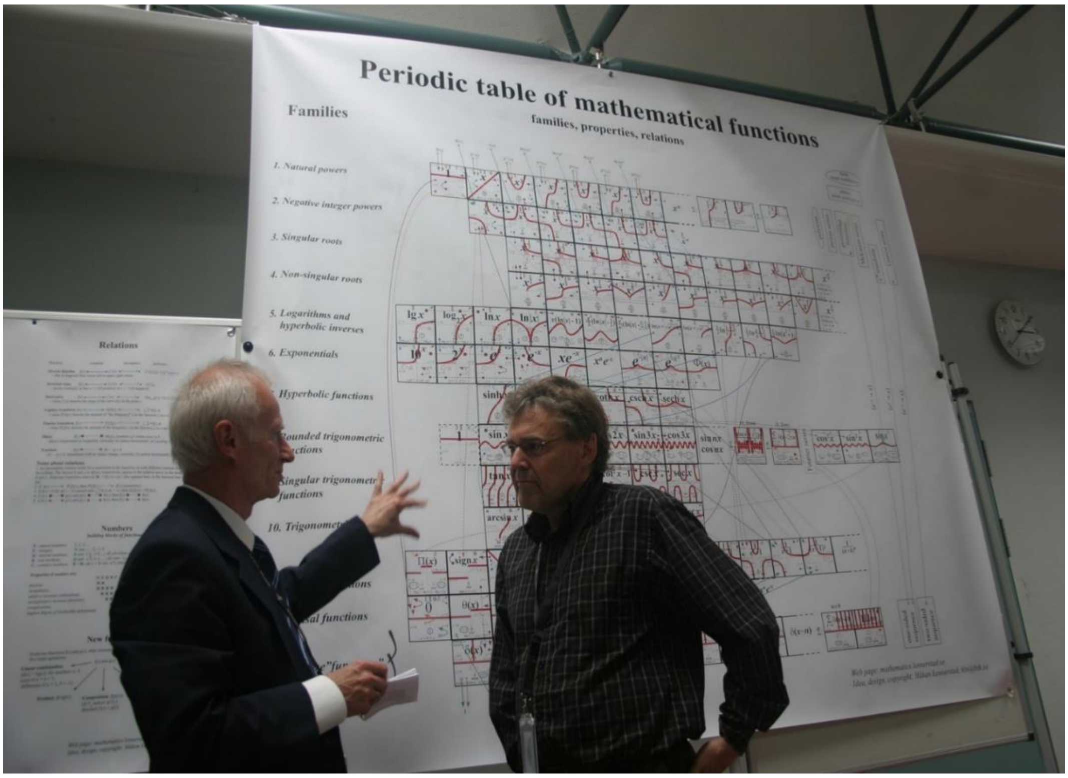

Abb. 10: Auf der Internationalen Tagung der SEFI MWG in Wismar 2010

8. Vortragsveranstaltungen

Vorträge zu mathematisch-naturwissenschaftlichen Themen und insbesondere zu Themen der Logik werden vom Gottlob-Frege-Zentrum seit seiner Gründung organisiert. Exemplarisch sind hier die Vorträge aus dem Zeitraum 2013 bis 2020 aufgeführt, die oft unter dem Motto ‚**Logik + x**' standen:

- Influence of Attention on Mathematical Knowledge and Assessment.
- Weißt Du wieviel Sternlein stehen?
- Logik und die Geldpolitik des Eurosystems.
- Der rechte Winkel.
- Logik und Recht.
- Logik und virtuelle Laboratorien.
- Logik und Kognition.
- Angewandte Argumentationslogik in der politischen Diskussion.
- Eine Mathestunde mit den Simpsons.
- Logik und Zahnersatz.
- Mathematik und E-Learning.
- Validierungsregeln in der Bankenaufsicht.
- Albrecht Kossel und die DNA. Ein Nobelpreisträger aus Mecklenburg-Vorpommern.

9. Und morgen?

Wir werden unser Engagement konsequent weiterführen. Neben den „Dauerbrennern" wie dem Auffrischungskurs und unseren Vortragsveranstaltungen (einschließlich Konferenzen) stehen in naher Zukunft diese beiden Themen an:

- Unterstützung des Romanprojektes zu Gottlob Frege,
- Mitwirkung beim Projekt Kagenmarkt der Stadt Wismar zu Ehren von Gottlob Frege.

Blicken wir in die nähere Zukunft, so sind einige Jubiläen in Sichtweite, die wir zum Anlass nehmen werden, um Gottlob Frege, seinen Namen und sein Werk in den Blickpunkt der Öffentlichkeit zu stellen:

- **08. November 2023** – 175. Geburtstag,
- **26. Juli 2025** – 100. Todestag,
- **08. November 2025** – 25. Jahre Gottlob-Frege-Zentrum,
- **08. November 2028** – 180. Geburtstag,
- **24. Januar 2029** – 150 Jahre Begriffsschrift.

Zudem bietet uns das politische oder gesellschaftlichen Leben immer wieder neue Beispiele dafür, dass eine fundierte mathematische und logische Bildung notwendig ist, um Erscheinungen und Ereignisse richtig einschätzen zu können. Auch in diesem Sinne werden wir weiter aktiv bleiben.

Literaturverzeichnis

Exemplarisch werden hier einige Quellen genannt, die die Aktivitäten des GFZ belegen:

1. Bernd, H. H.: Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel, Wismarer Frege-Reihe, Heft 02/2008.
2. Grünwald, N.; Kossow, A.; Pawletta, T.; Tiedt R.-P.: Cross-discipline Cooperation in Engineering using Computer Algebra Systems, GJEE 2(2) 177 – 180 (1998)
3. Grünwald, N.; Schott, D.: World Mathematical Year 2000 - Challenges in Revolutionizing Mathematical Teaching in Engineering Education under Complicated Societal Conditions, GJEE 4(3), 235 - 243 (2000).
4. Kienzle, B., Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege, Wismarer Frege Reihe, Heft 02/2006, 6-40.
5. Lämmel, U.: Der moderne Frege. Wismarer Diskussionspapiere, Heft 01/2004.
6. Schott, D., Modellierung und Simulation von Schwingungen, Proceedings 5. Workshop „Mathematik für Ingenieure“, Wismar, September 2006, Wismarer Frege-Reihe, Heft 05/2006, Teil 3, 4 – 18.
7. Schott, D. [Hrsg.]: Wanderungen zu Ehren von Gottlob Frege – Ein Resümee nach 20 Jahren, Frege-Reihe, Heft 03/2006.
8. Schott, D., How to teach Dynamical Systems in Engineering, Proceedings 10th UICEE Annual Conference on Engineering Education, Bangkok (Thailand), March 2007, 69 – 72.
9. Schott, D. [Hrsg.]: Gottlob Frege – Mathematiker, Logiker und Philosoph. Wismarer Frege-Reihe, Heft 01/2009 (Sonderheft für Frege-Preisträger).
10. Schott, D. [Hrsg.]: Gottlob Frege – ein Genius mit Wismarer Wurzeln, Leistung – Wirkung – Tradition. Leipziger Universitätsverlag 2012.
11. Schott, D. [Hrsg.]: Frege: Freund(e) und Feind(e). Proceedings of the International Conference 2013. Logos-Verlag Berlin 2015.
12. Schott, D.: Mit dem Drahtesel auf Freges Spuren: Eine Kultur- und Bildungsreise der besonderen Art. Anhang: Rohr, T.: Einleitungsvortrag zu Gottlob Frege, Wismarer Frege-Reihe, S. 80-84, Heft 03/2016.
13. Schott, D.: Zur Entwicklung der Mathematiklehre in den letzten 30 Jahren, Proceedings 16. Workshop „Mathematik für Ingenieure“, Dortmund, Mai 2020, Wismarer Frege-Reihe, Heft 02/2020, 4 – 24.

Autoren

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D-23966 Wismar
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Prof. Dr. rer. nat. Uwe Lämmel
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D-23966 Wismar
E-Mail: uwe.laemmel@hs-wismar.de

Edith und Joachim Framm

Anfänge einer Romanbiografie über Gottlob Frege

1. Einführung

Zunächst möchten wir dem Gottlob-Frege-Zentrum, insbesondere seinem Leiter Professor Lämmel, und Professor Schott für die Einladung zu diesem Jubiläum herzlich danken.

Auf der Suche nach einem neuen Stoff zum Schreiben kamen wir als Wismaraner schnell auf Gottlob Frege, vielleicht eine etwas kühne Idee. Aber wir wurden hier im Gottlob-Frege-Zentrum sehr freundlich aufgenommen.

In besonderer Weise ermutigten uns die Gespräche mit Professor Schott und seine Bereitschaft, Mitautor zu sein. Inzwischen haben wir mit ihm die ersten Texte erstellt.

Über Gottlob Frege ist schon so vieles gedacht, gesagt, geschrieben worden, und doch wollen wir uns aufmachen. Warum? Das Anliegen ist, Leben und Wirken dieses bedeutendsten Sohnes unserer Stadt **für möglichst viele verständlich** aufzubereiten. Dies soll in Form einer Romanbiografie geschehen.

Was ist damit gemeint?

Die weitgehend bekannten Lebensdaten Freges, also die tatsächlichen Begebenheiten, sollen erzählerisch miteinander verbunden werden, der Einbau von Dialogen wirkt erfahrungsgemäß belebend. Dabei wird auch manches fiktiv geraten, aber es soll immer möglichst authentisch sein.

Der begrenzte Einbau fachlicher Passagen – die auch überlesen werden könnten – ist vorgesehen. Hier ist ganz besonders Professor Schott gefragt.
Als Arbeitstitel für die Biografie haben wir gewählt: „Gottlob Frege – Der ‚Aristoteles‘ aus Mecklenburg“.

Lesungen können uns helfen, die mögliche Akzeptanz unserer Texte zu prüfen. Daher sind wir dankbar, dass wir hier heute etwas aus dem ersten und zweiten Kapitel, über die Kindheit und Jugend Freges, vortragen können.

Freges Vater hatte 1833 eine sogenannte Mädchenschule in Wismar eröffnet. Vielleicht kann man es sich nicht vorstellen, über welche hohe Geistigkeit der Vater verfügte. Aber er wird den Sohn sehr geprägt haben. Das wird schon aus der folgenden Leseprobe ersichtlich.

2. Erste Leseprobe

Auguste, die Mutter von Gottlob Frege, hatte früh gespürt, wie sehr ihrem Mann, Karl Alexander Frege, das Schreiben am Herzen lag. Schon 1837 war die erste Auflage seines Buches mit dem Titel „Das Leben Jesu“ erschienen.

Dabei war es nicht geblieben. Es folgte eine „Übersicht der Weltgeschichte“. 1850 kam die zweite Auflage eines Werkes mit dem Titel „Hülfsbuch zum Unterrichte in der deutschen Sprache für Kinder von 9 -13 Jahren“ heraus. Es ging ihm nicht allein darum, die Grammatik durchzubilden, sondern der Sprachunterricht solle, wie er schrieb „vor allem an vernünftiges Denken gewöhnen.“ Eine korrekte Darstellung der Gedanken schwebte ihm vor. Er entwickelte Buchstabenbilder für grammatische Zusammenhänge. Das ging weit über ein übliches Hilfsbuch hinaus.

Karl Alexander Frege war ständig in Gedanken. Eines Tages erklärte er: „Ich will jetzt über die Entwicklung des Gottesbewusstseins schreiben. Wie sich alles im Laufe der Zeit verändert hat, neu bedacht und anders bewertet wurde. Auguste, Du kannst Dir gar nicht vorstellen, in welche Fragestellungen ich dabei gerate.“

„Kommst Du denn zu klaren Aussagen?“

„Das kann man nun wirklich nicht behaupten“, antwortete ihr Mann. „Es ist schon verwirrend. Nicht nur die Bibel und die Kirchenväter sind heranzuziehen, sondern auch die Philosophen, Voltaire, Rousseau, Kant und viele andere Geistesgrößen. Da gibt es bestimmte Richtungen, jeder kommt zu anderen Vorstellungen, jeder glaubt im Recht, im Besitz der Wahrheit zu sein.“ Es würde behauptet, dass die Bibel vom Heiligen Geist inspiriert, von Gott selbst diktiert und eine übernatürliche Offenbarung sei. Er setzte fort:

„Aber warum enthält sie dann die Widersprüche, warum werden dort an der einen oder anderen Stelle unedle Handlungen beschönigt? Wunder, Begebenheiten, die den Naturgesetzen zuwiderlaufen, sollen Beweis für die Wahrheit einer Lehre sein? Auch die Türken halten ihren Koran für göttlich inspiriert, und sie lehren anders als die Bibel.“

Auguste dazu: „Noch ist Dein Buch ja nicht erschienen. Aber wenn ich Dir zuhöre, denke ich, hoffentlich eckst Du damit nicht bei der Kirche an, rufst Kritik, vielleicht sogar Zurechtweisung hervor.“

„Das mag wohl sein, aber ich kann mich diesen Fragen nicht entziehen.“ Gottlob lauschte aufgeregt dem Gespräch der Eltern …

Familie Frege um 1860 (Gottlob Frege ist der zweite von rechts)

3. Zweite Leseprobe

Zehn Jahre nach Gottlobs Einschulung

Der Schulsaal füllte sich. Gottlob und seine Mitschüler warteten bereits auf den hinteren Plätzen. Heute, am 29. September 1864, begannen die öffentlichen Prüfungen in der Großen Stadtschule. Vertreter Eines Hochedlen Rates der Stadt wollten sich, wie alljährlich, einen Eindruck von den schulischen Leistungen verschaffen. Zur Eröffnung gehörte ein wissenschaftlicher Vortrag. Auch diesmal würde der Rektor, Dr. Haupt, sprechen. Gottlob kannte ihn aus Begegnungen im Hause seines Onkels Caesar Frege. Dr. Haupt war im Revolutionsjahr 1848 in das Frankfurter Parlament gewählt worden und überall hochgeschätzt.

Der Rektor erklärte, der Hauptzweck des Unterrichts sei zunächst nicht, den Schülern gewisse Sprachen oder Wissenschaften beizubringen, sondern den Geist im Allgemeinen zu bilden, die geistigen und sittlichen Anlagen eines Schülers, soweit möglich, harmonisch zu entwickeln „… und aus ihnen das zu gewinnen, was wir als die schönste Blüte aller menschlichen Bildung zu betrachten gewohnt sind und was wir mit einem fremden Worte, da uns die Muttersprache versagt, Humanität nennen.“

Dem Unterricht in den alten Sprachen und in den mathematischen Wissenschaften gebühre der erste Rang, wenn es um die Entwicklung der Verstandeskräfte des Schülers ginge. Gottlob merkte auf, als Dr. Haupt sagte, dass die Mathematik allerdings zur sittlichen Bildung nicht beitragen könne. Mit dem Unterricht in den alten Sprachen würde hingegen nicht nur das strenge konsequente Denken durch die Strukturen der Grammatik eingeübt, sondern es würden zugleich historische, poetische und philosophische Schriften behandelt, mit denen der Schüler in eine ganz andere Welt eingeführt werde. Er könne damit … angesichts künftiger Herausforderungen „… von der Borniertheit und Intoleranz eines befangenen Urteils zu wahrhaft humaner Bildung durchdringen.“

Höhere Töchterschule Freges in Wismar, Böttcherstraße 2 (rechts, Rückansicht)

4. Dritte Leseprobe

Erneut zu Karl Alexander Frege, dem Vater

1866. Der Vater litt zu dieser Zeit, wie nicht wenige in der Stadt, an anhaltendem Typhus. Er wurde immer schwächer, aber nach wie vor mühte er sich mit seiner Abhandlung über das Gottesbewusstsein. Schon sehr krank rief er eines Tages den Sohn zu sich:

„Gottlob, sieh einmal“, sagte er und reichte ihm sein Buch herüber, das soeben in kleiner Auflage in Wismar gedruckt worden war. Der Vater hatte jahrelang in den freien Stunden daran gearbeitet, viele Bücher studiert, auch englische und französische Journale herangezogen. Gottlob freute sich, dass das Buch erschienen war.

„Wie schön Vater, all Deine Anstrengung hat sich gelohnt!“

„Die Gedanken haben mich einfach nicht losgelassen. Wahrheit, was ist Wahrheit? Mein Sohn, diese Frage hat mich besonders umgetrieben. Auch bei den Philosophen habe ich gesucht. Ich schreibe hier, dass objektive Gewissheit undenkbar ist, dass das Wesen aller Gewissheit ist, subjektiv zu sein.“ Gottlob verstand bereits, was mit dieser Aussage gemeint war. Der Vater fuhr fort: „Es muss darum gehen, einen sicheren Prüfstein der Wahrheit zu erhalten. Ach, Gottlob“, meinte er nicht ohne Hoffnung, „ob sich vielleicht einmal etwas finden ließe, womit das Denken vom Subjektiven befreit werden könnte und nur klares, reines Denken übrigbleibt?“

Er richtete sich auf und formulierte bedeutungsvoll: „Es gehört also offenbar größte Klarheit der Erkenntnis zur höchsten Vollendung des Menschengeistes und es muss als des Menschen Ziel bezeichnet werden, zu solcher zu gelangen.“

Gottlob hatte aufmerksam zugehört. Klares, reines Denken, das wünschte sich der Vater.

5. Abschlussbemerkungen

Dieses Projekt wird erst in einigen Jahren abgeschlossen werden können. Gerne werden wir gegenüber dem Gottlob-Frege-Zentrum über Fortschritte berichten und Anregungen zur Romangestaltung dankbar entgegennehmen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Literaturverzeichnis

1. Frege, K. A., Hülfsbuch zum Unterrichte in der deutschen Sprache für Kinder von 9 bis 13 Jahren: Hinstorff‘sche Hofbuchhandlung, Wismar und Ludwigslust, 2. Auflage 1850, Vorwort.
2. Frege, K. A., Die Entwicklung des Gottesbewusstseins in der Menschheit“, gedruckt von W. C. Beck, Wismar 1866, Seite 126.
3. Frege, K.A., Das Leben Jesu als treffliches Urbild echter Frömmigkeit: Ernst‘sche Buchhandlung, Quedlinburg und Leipzig, 2. Auflage 1840, Vorrede, Seite VI.

Autoren

Dr. Edith Framm und Dr. Joachim Framm
Am Markt 29
D-23966 Wismar
E-Mail: joachim.framm@t-online.de

Ingolf Max

Inhaltliche versus *formale* Arithmetik. Freges Kampf gegen Thomaes Schachanalogien

Zusammenfassung. Frege und Thomae waren seit 1879 Kollegen im mathematischen Seminar der Universität Jena. Frege versteht seine *Begriffsschrift* als eine *inhaltliche* Logik, in der eindeutig zwischen Zeichen und Bezeichneten unterschieden werden muss. Entsprechend ist in der *inhaltlich* verstandenen Arithmetik insbesondere eindeutig zwischen den Zahlzeichen und den durch diese Zeichen bezeichneten Zahlen zu unterscheiden. Die Analogie zwischen Zahlen und Schachfiguren, wie sie von Thomae zunächst 1898 vertreten wurde, betrachtet Frege als ein Kennzeichen der von ihm abgelehnten *formalen* Arithmetik. Wenn wir Zahlzeichen als Schachfiguren ansehen, dann bezeichnen diese Zeichen nichts und die für Frege unverzichtbare Unterscheidung zwischen Zeichen und Bezeichnetem entfällt. Wir markieren zunächst den nachweisbaren Beginn von Freges Kritik an Schachanalogien im Vorwort des ersten Bandes der *Grundgesetze der Arithmetik* vom 1893. Mit den Abschnitten 2 und 3 veranschaulichen wir die Komplexität und den Aspektreichtum von Freges Kampf zwischen 1893 und 1908 gegen diverse Formen von Analogien zwischen Arithmetik und Schach. Abschnitt 2 gibt dabei einen tabellarischen Überblick über Freges Ausführungen in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik II* in den Paragraphen 89 bis 132. Abschnitt 3 widmet sich der Kontroverse zwischen 1906 und 1908, die einerseits nachdrücklich die Unversöhnlichkeit der Gegensätze zwischen Frege und Thomae aufzeigt, andererseits in den Positionen beider Denker auch auf die Suche nach inspirierenden Aspekten von Analogien zwischen Logik/Arithmetik und Schach geht. Abschließend diskutieren wir kurz die Aktualität von Freges und Thomaes Positionen, indem wir sowohl mit Bezug auf Logik als auch Schach verschiedene Regelwerke (Kodizes) und ihre wechselseitigen Beziehungen untereinander betrachten.

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (geboren am 8. November 1848 in Wismar; gestorben am 26. Juli 1925 in Bad Kleinen) und Carl Johannes Thomae (geboren am 11. Dezember 1840 in Laucha an der Unstrut; gestorben am 1. April 1921 in Jena) waren seit 1879 Kollegen an der Universität Jena. Frege wirkte hier bereits seit 1874 als Privatdozent und wurde 1879 zum außerordentlichen Professor ernannt. Thomae wechselte 1879 von der Universität Halle-Wittenberg nach Jena und wurde ordentlicher Professor für Mathematik und Direktor des mathematischen Seminars. Frege leitete das Seminar auf Anregung von Thomae hin bis 1899 regelmäßig im Sommersemester (vgl. Kreiser 1983, 293). 1896 setzte sich Thomae in kollegialer

Weise für die Beförderung Freges zum ordentlichen Honorarprofessor ein (vgl. Kreiser 1983, 381 f. und auch 230). Das Verhältnis zwischen beiden Denkern durchlief verschiedene Phasen (vgl. Kreiser 2001, 225–234) und führte zwischen 1906 und 1908 in den *Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* zu einer heftigen Kontroverse um die korrekte Charakterisierung der Arithmetik als Wissenschaft. Überliefert ist jedoch auch, dass Frege 1920 Thomae zu dessen 80. Geburtstag gratuliert hat (vgl. Kreiser 2001, 232).[1]

1. Der Beginn von Freges Kampf gegen Schachanalogien als Kennzeichen *formaler* Arithmetik

Die früheste mir bekannte Stelle, in der sich Frege im Kontext seiner Kritik an einer formalen Auffassung der Arithmetik ablehnend auf die dort akzeptierten Analogien zum Schach bezieht, findet sich im Vorwort des ersten Bandes der *Grundgesetze der Arithmetik* von 1893:

> Ungünstig für mein Buch ist auch die weit verbreitete Neigung, nur das Sinnliche als vorhanden anzuerkennen. Was nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, sucht man zu leugnen oder doch zu übersehen. Nun sind die Gegenstände der Arithmetik, die Zahlen unsinnlicher Art; wie findet man sich damit ab? Sehr einfach! Man erklärt die Zahlzeichen für die Zahlen. In den Zeichen hat man dann etwas Sichtbares, und das ist ja doch die Hauptsache. Freilich haben die Zeichen ganz andere Eigenschaften als die Zahlen selbst; aber was thut's? Man dichtet ihnen die gewünschten Eigenschaften durch sogenannte Definitionen einfach an. Wie freilich eine Definition statthaben kann, wo gar kein Zusammenhang zwischen Zeichen und Bezeichnetem in Frage kommt, ist ein Räthsel. Man knetet Zeichen und Bezeichnetes möglichst ununterscheidbar zusammen; je nachdem es erforderlich ist, kann man dann die Existenz mit Hinweis auf die Greifbarkeit behaupten, oder die eigentlichen Zahleigenschaften hervorkehren. Zuweilen scheint man die Zahlzeichen wie Schachfiguren anzusehen und die sogenannten Definitionen als Spielregeln. Das Zeichen bezeichnet dann nichts, sondern ist die Sache selbst. Eine Kleinigkeit übersieht

[1] Andere aufschlussreiche Quellen zum Verhältnis zwischen Frege und Thomae finden sich in Dathe 1992 und 1997, Göpfert 2002, Kreiser 1983 und Stelzner 1996.

> man freilich dabei, dass wir nämlich mit ‚$3^2 + 4^2 = 5^2$' einen Gedanken ausdrücken, während eine Stellung von Schachfiguren nichts besagt. Wo man sich mit solchen Oberflächlichkeiten zufrieden giebt, ist für eine tiefere Auffassung freilich kein Boden. (Frege 1893, XIII).

Der konkrete arithmetische Ausdruck „‚$3^2+4^2 = 5^2$“ hat für Frege die Form „$a = b$“, wobei „a“ und „b“ für beliebig komplexe Termausdrücke stehen. Ein Termausdruck dieser Art ist ein Eigenname, dessen Bedeutung stets genau eine unsinnliche Zahl ist. Sowohl der Eigenname „$3^2 + 4^2$“ als auch der Eigenname „5^2“ benennen die Zahl 25. Frege verwendet konsequent Anführungszeichen, um anzuzeigen, dass er Zeichen – hier Zahlzeichen – verwendet. Die Angaben ohne Anführungszeichen sind nur ein Behelf zur Darstellung der eigentlich unsinnlichen Zahlen. Damit steht natürlich auch das Zahlzeichen „25“ als Eigenname für die Zahl 25. Zahlen sind *logische* Gegenstände, die durch Zahlzeichen bezeichnet werden. Weitere logische Gegenstände sind die beiden Wahrheitswerte das Wahre und das Falsche. Der Ausdruck „$3^2 + 4^2 = 5^2$“ ist der Name für das Wahre, da die beiden Eigennamen „$3^2 + 4^2$“ und „5^2“ darin übereinstimmen, dass beide die Zahl 25 bezeichnen, sie haben dieselbe Bedeutung.

Bereits vor 1893 hat Frege seine Unterscheidung zwischen *Sinn* und *Bedeutung* ausgearbeitet (Frege 1892). Diese Unterscheidung wendet er auf drei verschiedenen Typen von Ausdrücken an: Eigennamen, Satz(namen) und Begriffswörter. Sinn drückt immer die Art des Gegebenseins des jeweiligen Gegenstandes durch den entsprechenden Ausdruck aus. Der Sinn des Eigennamens „3^2+4^2“ ist verschieden vom Sinn des Eigennamens „5^2“. Die Zahl 25 ist durch diese beiden Eigennamen auf verschiedene Art gegeben. Ungeachtet dessen ist jedoch die Bedeutung der beiden Ausdrücke gleich.

Wir können arithmetische Gleichungen als Sätze auffassen, deren Namen das Wahre oder das Falsche benennen. „$3^2 + 4^2 = 5^2$“ und „$3^2 + 4^2 = 25$“ benennen das Wahre, obwohl auch hier die Art des Gegebenseins des Wahren verschieden ist. Für den *Sinn von Sätzen* führt Frege seinen Grundbegriff *Gedanke* ein. Der Gedanke von „$3^2 + 4^2 = 5^2$“ ist verschieden von dem Gedanken von „$3^2 + 4^2 = 25$“. Wenn wir nun Ausdrücke der Form „$a = b$“ allgemein betrachten, dann hängt der Wahrheitswert natürlich davon ab, welche Zahl(en) „a“ bzw. „b“ benennen. Das Zeichen „$a = b$“ hat aber nur dann Sinn, wenn bereits entschieden ist, dass für die Bedeutung nur das Wahre bzw. das Falsche in Frage kommen. Wir nennen diese klassische Annahme bezüglich der Gedanken von Sätzen auch *Zweiwertigkeitsprinzip*.

Im obigen Zitat betrachtet Frege nun die Analogien (a) „Zahlzeichen" – „Schachfigur", (b) „die sogenannten Definitionen" – „Spielregeln des Schachspiels" und (c) arithmetische Gleichungssätze wie z.B. „$3^2+4^2=5^2$" – „eine Stellung von Schachfiguren".

Im Falle von (a) ist Frege völlig davon überzeugt, dass Schachfiguren nichts bezeichnen. Zahlzeichen sind dagegen Eigennamen, die genau einen Gegenstand, die jeweilige Zahl, benennen. Die Vertreter der *formalen* Arithmetik wollen gerade mit dieser Analogie darauf verweisen, dass man in der Arithmetik auf die Einbeziehung einer gesonderten Bedeutung verzichten kann. Die *formale* Bedeutung des Zahlzeichens soll bereits durch die Verwendungsregeln dieses Zeichens in der Sprache der Arithmetik abgedeckt sein. Analog legen die Verwendungsregeln von Schachfiguren deren formale Bedeutung fest. Damit erübrigt sich scheinbar die Frage nach einem separaten Gegenstandsbezug.

Gegen die Analogie (b) könnte Frege wie folgt argumentieren: Definitionen sind eine besondere Form von Gleichungssätzen, von denen auf jeden Fall gefordert wird, dass sie (logisch) wahr sind. Damit dies aber so ist, müssen Definiendum und Definiens dieselbe Bedeutung haben. Doch selbst solche expliziten Definitionen durch Gleichsetzungen können *formal* bzw. *inhaltlich* aufgefasst werden. In der klassischen Aussagenlogik können wir z.B. mittels der undefinierten Junktoren Negation „$\neg$" (für „nicht ...") und Implikation „$\to$" (für „wenn ..., dann ...) die Konjunktion „$\wedge$ (für „und") definieren:

$$(A \wedge B) =_{df} \neg(A \to \neg B)$$

Diese Definition können wir formal ohne Blick auf die logische Wahrheit dieser Definitionsgleichung als Abkürzungsdefinition auffassen. D.h., wir können an jeder beliebigen Stelle unserer formalen Sprache Ausdrücke der Formen „$(A \wedge B)$" und „$\neg(A \to \neg B)$" gegeneinander austauschen (*formale Substitution*).

Wir können jedoch auch – und dies ist Freges Standpunkt – fordern, dass wir nur dann solche universellen Substitutionen durchführen dürfen, wenn wir bereits wissen, dass die Definitionsgleichung eine logische Wahrheit darstellt. Um dies zu illustrieren wollen wir die später von Peirce und Wittgenstein entwickelte Methode der *Wahrheitstabellen* verwenden:

$(A$	$\wedge$	$B)$	$=$	$\neg$	$(A$	$\rightarrow$	$\neg$	$B)$
W	**W**	W	**W**	**W**	W	F	F	W
W	**F**	F	**W**	**F**	W	W	W	F
F	**F**	W	**W**	**F**	F	W	F	W
F	**F**	F	**W**	**F**	F	W	W	F

Wir sehen nun, dass die Werteverläufe der Ausdrücke „$(A \wedge B)$“ bzw. „$\neg(A \rightarrow \neg B)$“ völlig übereinstimmen. Wir haben es mit einer logischen Gleichheit der beiden Ausdrücke zu tun. Frege wehrt sich dagegen, Definitionen einfach als Abkürzungen anzusehen. Definitionen sind nur dann akzeptabel, wenn die Zeichen auf beiden Seiten der Definition inhaltlich für dasselbe stehen, wenn sie somit stets dieselbe Bedeutung haben.

Im Falle von (c) verlangt Frege, dass arithmetische Zeichen wie „$3^2 + 4^2 = 5^2$“ einen Gedanken ausdrücken bzw. Sinn haben. Es muss sich die Frage nach der Wahrheit stellen lassen. Wenn nun arithmetische Gleichungen Stellungen von Schachfiguren analog sein sollten, dann müssten auch solche Stellungen einen Sinn haben. Wir müssten die Frage beantworten können, wofür diese Stellungen stehen.

Im obigen Zitat von 1893 verwendet Frege mehrfach „man“. Er lässt nicht erkennen, welche Personen sich dahinter verbergen. Könnte etwa Thomae zu ihnen gehören? Könnte Thomae in Jena bereits vor dem Erscheinen der *Grundgesetze der Arithmetik* Frege gegenüber seine Überlegungen zum Verhältnis von Arithmetik und Schach nahegebracht haben? Bisher habe ich keine Hinweise darauf gefunden. Insbesondere kommen in der ersten Auflage von Thomaes *Elementarer Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*, die 1880 erschien, auf das Schachspiel bezogene Ausdrücke überhaupt nicht vor.

Dies ändert sich mit der Auflage von 1898, die mit dem Kommentar „Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage“ versehen ist. Begann die 1. Auflage mit „§ 1. Normative zur Bildung des Zahlbegriffs“, steht nun „§ 1. Einleitende Bemerkungen“ am Anfang. Hierin findet sich der einzige Abschnitt im ganzen Buch, der jeweils einmal den Ausdruck „Schachspieler“, „Schachspiel“ bzw. „Schachspielregeln“ enthält:

> Die formale Auffassung der Zahlen zieht sich bescheidenere Grenzen als die logische. Sie fragt nicht, was sind und was wollen die Zahlen, sondern sie fragt, was braucht man von den

> Zahlen in der Arithmetik. Die Arithmetik ist[2] für die formale Auffassung ein Spiel mit Zeichen, die man wohl leere nennt, womit man sagen will, dass ihnen (im Rechenspiel) kein anderer Inhalt zukommt, als der, der ihnen in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber gewissen Verknüpfungsregeln (Spielregeln) beigelegt wird. Aehnlich bedient sich der Schachspieler seiner Figuren, er legt ihnen gewisse Eigenschaften bei, die ihr Verhalten im Spiel bedingen, und die Figuren sind nur[3] äussere Zeichen für dies Verhalten. Zwischen dem Schachspiel und der Arithmetik findet freilich ein bedeutsamer Unterschied statt. Die Schachspielregeln sind willkürliche, das System der Regeln der Arithmetik ist ein solches, dass die Zahlen mittels einfacher Axiome auf anschauliche Mannichfaltigkeiten bezogen werden können und uns in Folge dessen wesentliche Dienste in der Erkenntnis der Natur leisten. (Thomae 1898, 3)

Frege zitiert eben diese Textpassage am Beginn des § 88 im zweiten Band seiner *Grundgesetze der Arithmetik* (vgl. Frege 1903, § 88, 97 f.). Es folgt unmittelbar Freges Lesart:

> Mit andern Worten:
> Für die Arithmetik kommen nur die Regeln in Betracht, nach denen die arithmetischen Zeichen zu behandeln sind, nicht aber, was diese bedeuten. Als Unterschied von dem Heineschen Standpunkte könnte man bemerken, dass Thomae die Frage nach dem Wesen der Zahlen als für die Arithmetik unerheblich ablehnt, während Heine sie dahin beantwortet, dass die Zahlen Zeichen seien. Da aber Beide darin übereinkommen, dass die Arithmetik sich mit Zeichen zu beschäftigen habe, so ist dieser Unterschied unwesentlich. Heine nennt diese Zeichen Zahlen; Thomae dagegen scheint unter „Zahl“ etwas zu verstehen, dessen Wesen für die Arithmetik nicht in Betracht komme, das also wohl kein Zeichen ist, sondern etwa die Bedeutung eines Zeichens. Da er aber auch von der Bedeutung der Zahlen spricht, so stempelt er sie doch wieder zu Zeichen, sodass eine folgerechte Redeweise hier wohl vermisst wird. Diese Bedeutungen der Zahlzeichen, die von Thomae zwar angenommen,

[2] Frege hat an dieser Stelle abweichend von thomaeschen Text „nun“ eingefügt (FREGE 1903, § 88, 97).

[3] Hier hat Frege abweichend „das“ hinzugefügt (ebenda).

> aber als ausserhalb des Rahmens der Arithmetik liegend angesehen werden, haben wir immer Zahlen genannt. Wir sehen also, dass diese eigentlichen Zahlen oder Grössenverhältnisse nach diesem Mathematiker von der Arithmetik auszuschliessen sind. So haben wir denn hier eine eigenthümliche Arithmetik, gänzlich verschieden von derjenigen, die als ihre Gegenstände die eigentlichen Zahlen betrachtet, und die wir zum Unterschiede von der formalen inhaltliche Arithmetik nennen wollen. Wir werden demnach wohl annehmen dürfen, dass Cantor auf dem Boden der inhaltlichen, Heine und Thomae dagegen auf dem der formalen Arithmetik stehen. Der Unterschied ist tief einschneidend. Freilich wird ein künftiger Geschichtsschreiber vielleicht feststellen können, dass es auf beiden Seiten an der folgerechten Durchführung fehlt, wodurch der Gegensatz doch wieder etwas von seiner Schärfe verliert. (Frege 1903, § 88, 98)

Dieser Paragraph ist eingebettet in „III. Die reellen Zahlen, 1. Kritik der Lehre von den Irrationalzahlen, c) Die Theorien des Irrationalen von E. Heine und J. Thomae (§§ 86–137). Im oben stehenden Zitat kommt der Bezug zum Schachspiel überhaupt nicht vor. Das Thema von Frege ist die Gegenüberstellung von *formaler* und *inhaltlicher* Arithmetik. Den Unterschied charakterisiert er als „tief einschneidend“ und zu seiner Zeit als einen mit einer enormen Schärfe. Für die *formale* Arithmetik „kommen nur die Regeln in Betracht, nach denen die arithmetischen Zeichen zu behandeln sind, nicht aber, was diese bedeuten.“ Dagegen betrachtet die *inhaltliche* Arithmetik „als ihre Gegenstände die eigentlichen Zahlen“.

Man könnte nun auf Grund der Position von Ausdrücken der Form „Schach-“ bei Thomae in seiner „Einleitung“ und der Tatsache, dass Frege diesen Bezug nicht unmittelbar aufgreift, vermuten, dass es sich hier um eine eher marginale Frage handelt. Dagegen sprechen aber zwei Fakten: (1) Frege kommt auf die zitierte Stelle aus Thomae (1898) mehrfach und in bemerkenswerter Ausführlichkeit zurück. Dabei analysiert Frege kritisch weitere mögliche Bezüge zum Schach. (2) Thomae fühlt sich bemüßigt 1906 eine polemische Erwiderung auf Freges Ausführungen zu verfassen, in der er weitere Schachanalogien hinzufügt. Darauf wiederum reagiert Frege 1906 und 1908. Er argumentiert sowohl sachlich als auch äußerst angriffslustig und polemisch für seine Grundüberzeugung ohne jedoch die neuen Anregungen von Thomae wirklich aufzugreifen.

Bevor Frege direkt auf Thomae eingeht, macht er bereits im Abschnitt „b) Cantors Lehre von den Irrationalzahlen“ in einer Fußnote eine kritische Bemerkung zur Analogie Zahlen – Schachfiguren und legt einen Link zu seinen späteren Betrachtungen:

> Es besteht freilich auch eine Meinung, nach der die Zahlen weder Zeichen sind, die etwas bedeuten, noch auch unsinnliche Bedeutungen solcher Zeichen, sondern Figuren, die nach gewissen Regeln gehandhabt werden, etwa wie Schachfiguren. Danach sind die Zahlen weder Hülfsmittel der Forschung noch Gegenstände der Betrachtung, sondern Gegenstände der Handhabung. Das wird später zu prüfen sein. (Frege 1903, § 71, 83, Fußnote 1)[4]

Frege unterscheidet hier Zahlen

(1) als Zeichen, „die etwas bedeuten“ und damit als „Hülfsmittel der Forschung“

(2) als „unsinnliche Bedeutungen“ und damit als „Gegenstände der Betrachtung“ sowie

(3) als „Figuren, die nach gewissen Regeln gehandhabt werden, etwa wie Schachfiguren“ und damit Gegenstände der Handhabung.

(1) und (2) sind kompatibel mit der inhaltlichen Arithmetik. Wir müssen unterscheiden zwischen (1) den Zahlzeichen wie „$3^2 + 4^2$“ und (2) der Zahl als ihre unsinnliche Bedeutung, hier die Zahl 25. (3) ist dagegen für Frege die Position, die der *formale* Arithmetiker vertritt.

2. Zu den Schachanalogien in Freges *Grundgesetzen der Arithmetik II* ab § 89

In Freges *Grundgesetzen der Arithmetik II* von 1903 finden wir ab § 89 nun doch überraschend viele Textstellen, in denen Frege die thomaeschen Schachanalogien kritisch diskutiert. Der letzte Bezug findet sich in § 132. Um einerseits einen Eindruck von der Vielfalt von Freges Bezügen auf Schach zu vermitteln und andererseits hier nicht allzu sehr ins Detail gehen zu wollen, beschränke ich mich nachstehend auf einen tabellarischen

[4] Dies ist eine der Bemerkungen, die sicher dazu beigetragen hat, dass sich Ludwig Wittgenstein (1889–1951) ab 1929 sehr intensiv mit Schachanalogien in verschiedenen Handlungskontexten beschäftigt hat (vgl. Max 2020).

Überblick. In der linken Spalte werden die Nummern der relevanten Paragraphen aus den *Grundgesetzen II* angegeben. In der mittleren Spalte zitiere ich zumeist Phrasen aus Freges Text, die auf Schach bezogene Ausdrücke enthalten. In der rechten Spalte finden sich knappe Angaben zum Kontext, zu den jeweiligen (scheinbaren) Analogien bzw. zu Freges kritischen Positionen, z. T. belegt durch kurze Zitate aus dem jeweiligen Paragraphen. Ergänzt wird diese Übersicht durch einige Kommentare in den Fußnoten. Diese Tabelle ersetzt natürlich weder eine gründliche Analyse von Freges eigener Auffassung noch kann sie der Relevanz fregescher Überlegungen für die aktuellen Diskussionen zur Philosophie der Mathematik gerecht werden.

§	Phrase	Kontexte, (Schein-)Analogien, Freges Position
89	die (willkürlichen) „Regeln des Schachspiels“	Anwendung & das Verlassen des Bodens der Arithmetik
90	„die Schachfiguren“	Scheinanalogie Schachfigur – Zahlzeichen / Schachfiguren bedeuten nichts
90	„das Schachspiel“	eher Kunst bzw. Spiel als eine Wissenschaft
91	„Stellungen von Schachfiguren, die nach gewissen Regeln verändert werden ohne Rücksicht auf einen Sinn	Willkürlichkeit (Spiel) vs. Nichtwillkürlichkeit (Arithmetik) von Regeln
91	eine „Stellung von Schachfiguren“	Nichtanwendbarkeit (Schach) vs. Anwendbarkeit (Arithmetik)
91	„einem den Regeln gemässen Schachzuge	Dies müsste dem „Uebergang von einem Gedanken zu einem andern aus jenem folgenden“ entsprechen. Scheinanalogien: Ausgangsposition einer Figur – Gedanke 1, Position dieser Figur nach Ausführung des Zuges – Gedanke 2, „Übergang“ (Zug)– logischer Übergang (Folgerung)?

93	(a) „im Schachspiele selbst“ vs. (b) „in einer Theorie des Schachspiels“	Wir haben keine Lehrsätze in (a), sondern nur in (b); (b) untersucht nicht eigentlich die Schachfiguren, sondern: „auf die Regeln kommt es an und auf das, was aus ihnen folgt“.
93	„im Schachspiele Alles unveränderlich feststeht“	Frege begrenzt seinen Begriff „Schachspiel“ offenbar auf die Regeln, die für alle Schach*partien* gelten, die aus der Ausgangsstellung gespielt werden können.
93	„Einführung neuer [Schach-]Figuren“	Mögliches kann unmöglich, Unmögliches kann möglich werden. Diese Willkür ist für die Arithmetik nicht zulässig.
95	„Schachfiguren“ und die „Regeln des Schachspiels“	Beziehung dieser Regeln zur Bedeutung
95	„der schwarze König“	Scheinanalogie zu „der Name ‚Sirius‘“: Letzterer bezeichnet „einen gewissen Fixstern“. Was bezeichnet der vorgebliche Eigenname „der schwarze König“?
95	Sprechweise von einem Verhalten von „Schachfiguren“ gegenüber Regeln	Zuständig für das Verhalten ist „der Spielende oder Rechnende“, nicht die Schachfigur, die über keinen Willen verfügt.
96	„Schachfiguren“ & „Aufstellung der Regeln“	„im Grunde erhalten die Schachfiguren durch die Aufstellung der Regeln wohl keine neue Eigenschaften“
96	„ein Bauer im Schachspiele“	Ein Bauer ist kein äußeres Zeichen seines Verhaltens.
96	„die Regeln des Schachspieles“	Diese Regeln handeln von der *Handhabung* der Schachfiguren.
96	„eine Regel nicht selten von mehreren Figuren handelt“	Scheinanalogien: (a) Figur – Zeichen und (b) Regeln – Sinn/Bedeutung

96	„mehrere Regeln dieselbe Figur betreffen“	Diese Nichteindeutigkeit in der Zuordnung Regel – Figur schließt die Analogie zur Beziehung Zeichen – Sinn/Bedeutung aus.
96	Fußnote 1: „Felder des Schachbretts“	Diese „müssen hier eigentlich auch zu den Figuren gerechnet werden.“
97	„Figur“ und „ihre Bedeutung“	„Wie wäre es denkbar, dass in der Theorie des Schachspiels Bedeutungen der Schachfiguren wichtig sein könnten, die für das Spiel gleichgültig sind?“
100	„gleichgestaltete Figuren“, z. B. „die weissen Bauernfiguren auf dem Schachbrette als eine einzige Figur	„Bauer“ ist weder bei der Aufstellung der „Regeln des Schachspiel“ noch „in der Theorie“ ein Eigenname. Der Ausdruck „der weiße Bauer“ wäre nur dann ein Eigenname, wenn dieser Ausdruck mit dem bestimmten Artikel genau eine Bedeutung hätte.[5]
102	„Schachspiele“ und „Figuren“	„Beim Schachspiele müssen wir die Figuren zunächst kennen lernen, um dann die Regeln verstehen zu können.“[6]
102	„das Rochiren im Schachspiele“	Falls es auf die Bedeutung nicht ankommt, besteht eine Analogie zu einer arithmetischen Operation wie dem Subtrahieren.[7]
106	(a) „den Regeln des Schachspiels“ & (b) „eine Gruppe von Schachfiguren auf dem Schachbrette“	(b) stellt keine Antwort auf die Frage nach (a) dar. Thomae geht dagegen davon aus, dass z. B. die Formel „$a + a' = a' + a$“ die Regel der Kommutativität der Addition „enthält“.

107	„Züge des Schachspiels“, „Regeln“, „Stellung der Schachfiguren“	Weder eine Stellung der Schachfiguren noch ein Zug drückt eine Regel aus. „... die Regeln sind nicht Gegenstände des Spiels, sondern Grundlage der Theorie des Spiels“. Analog wäre die Formel „$a + a' = a' + a$“ „Ausdruck einer Regel dieses Spiels“, „eine der Grundlagen von dessen Theorie“ und mit dem „Wortausdrucke einer Regel des Schachspiels“ zu vergleichen.
108	„Stellung von Schachfiguren“	Scheinanalogie zu einer Figurengruppe wie „$(2 + \frac{1}{2}) \cdot 5 = \frac{1}{2}$“.
108	„einem Schachzuge“, „einem Zuge des Schachspiels“	Scheinanalogie: Schachzug – Ersetzung einer Figurengruppe wie „$2 + \frac{1}{2}$“ durch eine andere Figurengruppe wie „$\frac{1}{2} + 2$“.

[5]Gemäß dieser Angabe wäre der Ausdruck „der Schachkönig“ ebenfalls kein Eigenname, da die Bedeutung dieses Ausdrucks der weiße König oder der schwarze König sein könnte. Dagegen könnte der Ausdruck „der weiße Schachkönig“ allerdings als Eigenname gelten, da es gemäß den Regeln in jeder Schachpartie genau einen weißen König gibt. Der Ausdruck „die weiße Schachdame“ wäre allerdings ohne weitere Erläuterung kein Eigenname, da sich jeder der weißen Bauern den Regeln gemäß in eine Dame verwandeln könnte. Insbesondere können Schachpartiestellungen entstehen, in denen sich mehrere weiße Damen auf dem Brett befinden.

[6]Frege erläutert leider nicht, was es besagen soll, dass „wir die Figuren zunächst kennen lernen“ müssen. Vielleicht dachte er daran, dass ein Schachanfänger zunächst lernt, welche Zugmöglichkeiten eine Figur auf dem leeren Brett hat. Allerdings benötigen wir häufig für die Erläuterung von Zugmöglichkeiten mehr als nur die Figur: Schlagen gegnerischer Figuren, insbesondere en-passant-Schlagen, Bauernumwandlungen und Rochade. Wir müssen auch lernen, eine Ausgangsstellung der Schachfiguren für Schachpartien aufzubauen.

[7]Auch hier ist Frege leider sehr knapp. Er schreibt: „Wenn nun das Subtrahiren einer ersten Figur von einer zweiten darin besteht, dass wir diese – oder eine ihr gleichgestaltete – links, jene rechts von demselben Minuszeichen hinschreiben, so hindert mich nichts, eine Dreifigur [‚3‘] von einer Zweifigur [‚2‘] zu subtrahiren [‚2–3‘] Frege (1903, § 102, 109).“ Ich könnte natürlich eine Beschränkung auf den Bereich der natürlichen Zahlen vornehmen. Dann hätte ich scheinbar eine Problem mit der Handhabung der Figuren ‚3‘ und ‚2‘. Das Rochieren bietet nun gleich mehrere Analogie-Aspekte an: (a) Beim Rochieren werde sowohl der König als auch der Turm in einer Weise bewegt, in der sie sonst nie bewegt werden dürfen: Der König „überspringt“ ein Feld und der entsprechende Turm „überspringt“ diesen König. Normalerweise kann der König stets nur auf ein direkt angrenzendes Feld ziehen und der Turm kann sonst keine Figuren überqueren. (b) Die Ausführbarkeit des Rochierens hängt von mehreren Kontextbedingungen ab. (i) Weder König noch Turm dürfen bereits gezogen haben, (ii) der König darf nicht im Schach stehen, (iii) weder das Feld, welches der König überqueren möchte, noch das Zielfeld des Königs darf angegriffen sein. „Also: wann ein Subtrahiren möglich sei, lässt sich garnicht beurtheilen, ehe wir wissen, welche Figuren dabei in Betracht kommen können, und was mit ihnen vorzunehmen sei.“ (ebenda)

108	„Stellung von Schachfiguren“ als (a) Ergebnis eines Zuges und (b) als Lehrsatz mit *Sinn*	Analogie: Es muss zwischen einer „Figurengruppe“ (a) „im Spiele selbst“ bzw. (b) „in der Theorie des Spiels“ unterschieden werden.
109	„Grundstellung der Schachfiguren“	ähnlich der thomaeschen Gleichungen „als Figurengruppen, von denen das Spiel ausgeht“, doch dann drücken sie *keinen Sinn* aus.
110	„die Regeln des Schachspiels“	Wenn sie Erlaubnisse und auch Verbote ausdrücken, sind sie „den Sittengesetzen näher verwandt als den Gesetzen der inhaltlichen Arithmetik, die zwar verkannt, aber nicht übertreten werden können.“
111	„im Schach“ gelten „von den Bauern andere Regeln ... als von den Springern“	Dagegen: Die thomaeschen Regeln handeln „von allen Zahlfiguren ohne Unterschied“.
112	„im Schachspiele“ & „allen schwarzen Bauernfiguren“	„Man zieht ja auch im Schachspiele mit den Figuren selbst und nicht mit einem gewissen Etwas, das allen schwarzen Bauernfiguren etwa gemeinsam wäre.“
114	„Figuren verschiedener Art, etwa Springer und Läufer“	Analogie: Als *formale* Figuren wären „$1-1$“, „$6-2\cdot 3$“ und „0“ „Figuren verschiedener Art“.
114	„zwei Bauern gleicher Farbe im Schachspiele“	Analogie: Als *inhaltlich* bedeutungsgleiche Figuren müssten „$1-1$“, „$6-2\cdot 3$“ und „0“ eher analog zu Figuren *derselben* Art (z. B. weiße Bauern) sein.
118	„Schachfigur“, „Regeln des Schachspiels“ und Widerspruch	Einen „Widerstreit, der etwa zwischen den Regeln des Schachspiels obwaltete, in das Innere einer Schachfigur“ zu verlegen, ist nicht akzeptabel.

121	„Wir können auch Schachfiguren in Reihe ordnen; sind sie darum Grössen?“	Nein! Frege lehnt die Identifizierung von „das Ordnen in Reihe“ mit dem „Unterordnen unter den Begriff Grösse“ ab, da die inhaltliche Anerkennung von Dingen als Größen logisch der Anordnung vorausgehen muss.
121	„$3 > 2$“ als eine „Stellung von Schachfiguren“?	Nein! Wenn bezogen auf Schach überhaupt eine Entsprechung zu „$3 > 2$“ vorliegt, dann muss es eine zur *Theorie* des Spiels sein.
122	„‚schwarz‘ und ‚weiss‘ beim Schachspiel“[8]	Diese Ausdrücke kommen bei der Anwendung der Regeln in Betracht.
132	„eine Gruppe von Schachfiguren“	Bezüglich des Ausdrucks „(000..0..)“ fragt Frege, ob diese Figurengruppe (inhaltlich) eine Zahlenfolge bezeichnet oder (formal) selbst eine Zahlenfolge darstellt.[9] Eine Gruppe von Schachfiguren steht nach Freges Auffassung „für sich selber da“ und hat somit keine Bedeutung.[10]

[8]Gemeint ist hier offenbar, dass wir die Schachfiguren in weiße und schwarze unterteilen können. Insbesondere können wir dann alle Schachfiguren desselben Typs – wie z. B. Bauern – in eben dieser Weise unterteilen. Eine mögliche Analogie wäre dann eine Entsprechung zwischen positiven Zahlfiguren wie „2“ und weißen Schachfiguren bzw. negativen Zahlfiguren wie „-2“ und schwarzen Zahlfiguren.

[9]Frege bezieht sich hier auf die folgende Aussage von Thomae: „Die einfachste Nullfolge ist natürlich (000..0..).“ (Thomae 1898, 6).

[10]Frege äußerst sich leider nicht dazu, dass bestimmte Gruppen von Schachfiguren Stellungen sind, die entweder direkt das Ende einer Partie anzeigen (Matt bzw. Patt) oder derart sind, dass das Remis (Unentschieden) unabhängig von beliebigen weiteren Zugfolgen bereits feststeht („dead position“ gemäß der FIDE Laws of Chess, Article 5.2.2). In Frege 1903 kommt überhaupt kein Hinweis auf „Matt“, „Patt“ bzw. „Remis“ vor.

3. Zur Unversöhnlichkeit der Gegensätze zwischen Frege und Thomae: Die Kontroverse 1906–1908

Thomae reagiert 1906 auf Freges Ausführungen mit einer „Ferienplauderei“, die er mit „Gedankenlose Denker“ überschreibt. Zunächst wiederholt er seine Position von 1898:

> „Wer eine Arithmetik auf eine formale Zahlenlehre aufbauen will, eine Lehre, die nicht fragt, was sind und was sollen die Zahlen, sondern die fragt, was brauchen wir von den Zahlen in der Arithmetik, dem wird es erwünscht sein, auf ein anderes Beispiel einer rein formalen Schöpfung des menschlichen Verstandes hinweisen zu können. Ein solches Beispiel glaubte ich im Schachspiel gefunden zu haben. Die Schachfiguren sind Zeichen, denen im Spiel kein anderer Inhalt zukommt, als der ihnen durch die Spielregeln zuerteilt wird.“ (Thomae 1906, 434).

Thomae charakterisiert hier das Schachspiel als eine „rein formale Schöpfung des menschlichen Verstandes“. Dies ist angesichts der Historizität des Schachspiels sicher eine problematische Aussage. Wenn die Analogie zur Arithmetik zutreffen sollte, dann wäre auch sie eine solche „rein formale Schöpfung“. Eine andere Frage ist jedoch, ob sich Arithmetik und Schachspiel als formale Spiele darstellen lassen. Hilbert hatte bereits 1899 mit seiner *Erfindung* der *axiomatischen Methode* für die Geometrie eine solche Vorgehensweise attraktiv gemacht. Die *formal* verstandene *Bedeutung* von Zeichen wird durch die rein zeichenbezogene Angabe einer Gesamtheit von Axiomen und Schlussregeln vollständig bestimmt. Interessanterweise nehmen weder Thomae noch Frege Bezug auf Hilbert. Letzterer war allerdings mit Hilberts Programm sehr vertraut und hatte bereits um 1900 eine kritische briefliche Auseinandersetzung mit Hilbert (vgl. Frege 1980, 1–24). Es war zunächst eine offene Frage, ob sich die Arithmetik vollständig axiomatisieren lassen würde. Offenbar liegt keine Axiomatisierung des Schachspiels vor bzw. wir wissen wohl nicht einmal, was „eine Axiomatisierung des Schachspiels“ sein sollte. Jedoch gibt es in inzwischen die *FIDE Laws of Chess*, die bestimmte Begriffe des Schachspiels als formale ausweisen. Allerdings haben wir es hier mit einer Art Gesetzestext zu tun, der von der FIDE (Weltschachverband „Fédération Internationale des Échecs“) beschlossen wurde.

Frege versteht den Begriff *Inhalt eines Zeichens* immer im nichtformalen Sinne als eine Beziehung zwischen einem Zeichen und etwas, was gewissermaßen außerhalb des Zeichen liegt bzw. nicht selbst wieder einfach Zeichen sein kann. Daran ändert sich seiner Meinung nach nichts, wenn wir von bloßen Zeichen zu bloßen Verknüpfungsregeln von Zeichen übergehen. Thomae betrachtet dagegen Zahlen als Zeichenfiguren analog zu Schachfiguren. Der Inhalt wird in beiden Fällen *formal* bestimmt durch das Verhalten der Zeichen gegenüber den festgesetzten Regeln:

> Der Inhalt einer Schachfigur, z. B. des weißen Damenspringers, oder des schwarzen d-Bauern, wird im Schachspiel durch ihr Verhalten gegen die Spielregeln bestimmt. (Thomae 1906, 436)

Interessant an dieser Bemerkung ist, dass Thomae den Hinweis von Frege aufgreift, dass die Benennung von Figuren im Schachspiel die Form von *Eigennamen* aufweisen müssen. Die sprachliche Form eines Eigennamens ist dadurch gekennzeichnet, dass wir es mit einer Konstruktion im *Singular* zu tun haben, die mit einem *bestimmten* Artikel eingeleitet wird: „*der* weiße Damenspringer“ und „*der* schwarze d-Bauer“. Wir erfahren leider nicht, was alles unter „Verhalten gegen die Spielregeln“ fallen soll. Gehören dazu z. B. die mögliche Umwandlung des schwarzen d-Bauern in Dame, Turm, Läufer oder Springer, die Möglichkeiten des Schlagens bzw. Geschlagenwerdens dieses Bauern oder seine Fähigkeit Schachgebote zu unterbinden bzw. selbst Schach zu bieten oder gar – in bestimmten Situationen – Matt zu setzen? Aus der Hilbertschen Position würde der *Inhalt* bzw. die *formale Bedeutung* einer jeden Figur des Spiels durch die *Gesamtheit* aller Regeln bestimmt. Die von Frege kritisierte Redeweise von „Verhalten gegenüber“ würde hier jedoch eher als eine metaphorische Redeweise verstanden.

Frege hatte von Thomae gefordert, Beispiele für Lehrsätze im Schach anzugeben, die er jedoch immer für solche der *Theorie* des Schachs und nicht für solche im Schach*spiel* hält. Thomae reagiert darauf wie folgt:

> In bezug auf das Schachspiel habe ich mich nun auch, wie mich Herr Frege belehrt, stark geirrt. Nach ihm gibt es in diesem Spiele keine Lehrsätze und Beweise. Der Satz: Turm und König können den feindlichen König auf jedem Randfelde matt setzen, ist also nur wohl für meinen nicht hinreichend logisch geschulten Verstand ein Lehrsatz, und sein Beweis ein Scheinbeweis. (Thomae 1906, 436)

Wenn die (Gesamtheit der) Regeln des Schachspiels gegeben (ist) sind, dann können wir nach Thomae Sätze der oben angegebenen Art beweisen. Frege äußert sich dazu nicht direkt. Er würde jedoch einen solchen Satz sicherlich der *Theorie* des Schachs zuordnen. Damit bestünde jedoch die Möglichkeit eine solche Theorie analog zur Arithmetik aufzufassen.

Den Obertitel „Gedankenlose Denker“ seiner „Ferienplauderei“ erläutert Thomae knapp wie folgt:

> Durch Frege erfahre ich, daß die Schachspieler wohl Denkarbeit leisten, aber keine Gedanken haben, sie sind gedankenlose Denker. (ebenda)

Er bezieht sich damit direkt auf die folgende Äußerung Freges:

> Obwohl also geistige Arbeit geleistet würde, fehlte doch ganz der Gedankengang, der bei uns die Sache begleitet und ihr eigentlich erst Interesse verliehen hat. (Frege 1903, § 90, 100)

Dabei verwandelt er allerdings Freges „geistige Arbeit“ in „Denkarbeit“. Schachspieler werden von beiden als „Denker“ anerkannt. Sollten die von ihnen gemachten Züge bzw. die jeweils erzeugten Stellungen Sätzen bzw. Formeln der Arithmetik entsprechen, dann müssten sie gemäß Frege einen *Sinn* haben. Sie müssten *Gedanken* ausdrücken. Für die Züge bzw. die Schachstellungen bestreitet Frege dies. In einem begrifflichen Sinne werden somit im Schachspiel keine Gedanken ausgedrückt. Thomae spielt in seinem Text natürlich damit, dass „gedankenlos“ normalerweise mit einer anderen Konnotation verbunden ist. „Gedankenlose Denker“ wären für Thomae „Träumer“.

Thomae gibt nun weitere Beispiele dafür, dass aus seiner Sicht dennoch Gedanken ausgedrückt werden:

> Wenn ich aber sage: Im Endspiel des Stamma[11] (ersticktes Matt[12]) kommt die Besonderheit des Springers zu beredtem

[11] Thomae verweist hier auf den syrischen Schachmeister Philipp Stamma (1705–1755), der insbesondere das Schachbuch *Essai sur le Jeu des Echecs* (Paris 1737) verfasste, welches einhundert Schachkompositionen vorstellt.

[12] Ein ersticktes Matt ist eine Endstellung im Schach, in der ein Springer den gegnerischen König angreift (ihm „Schach bietet“) und dieser König zudem mattgesetzt wurde, weil alle seine möglichen Zielfelder von eigenen Figuren besetzt sind. Stamma hat Schachkompositionen der Form „Matt in n Zügen“ entwickelt, bei denen die Endstellung nach spätestens n Zügen als ersticktes Matt vorliegen kann bzw. muss.

> Ausdruck, so scheint dieser Satz, wenn ich Frege recht verstehe, keinen Gedanken auszudrücken. Man vergleicht gern einen Schachspieler mit einem Feldherrn, der einen Schlachtplan entwirft und ihn im Gange der Schlacht nach den Umständen ändert. Ob auch der Feldherr unter den Begriff des gedankenlosen Denkers fällt oder nicht, wage ich nicht zu entscheiden. Die Schachspieler freilich glauben in ihren Spielen und Problemen tiefe schöne pikante und ähnliche Gedanken zu finden, so daß auch das Wort „Gedanke"nicht eindeutig zu sein scheint. (Thomae 1906, 436 f.)

Hier wird überaus deutlich, dass Thomae nicht bereit ist, den Begriff „Gedanke“ im Sinne Freges zu verwenden. Interessant und durchaus anregend ist jedoch, dass Thomae nun unter Schach nicht mehr nur Schach*partien*, sondern auch Schach*probleme* (Schach*aufgaben*) fasst. Bevor wir Schachprobleme lösen können, müssen diese *erfunden* werden. Diesem Aspekt steht Frege nun seinerseits in Bezug auf die Logik – seine *Begriffsschrift* – seit langem positiv gegenüber:

> Schon das Erfinden dieser Begriffsschrift hat die Logik, wie mir scheint, gefördert. (Frege 1879, XIII). Ich musste daher andere Zeichen für die logischen Beziehungen erfinden.“ (ebenda 100)

Es bleibt der Unterschied zu Boole und Schröder, dass Frege solche Zeichen erfindet, die einen *beurteilbaren Inhalt*, einen *Sinn* und eine *Bedeutung* haben müssen.[13]

Thomae nutzt für seine Argumentation zudem Freges Eingeständnis, dass sein Programm einer Reduktion der Arithmetik auf die von ihm selbst entwickelte und immer inhaltlich verstandene Logik mit Blick auf die Antinomie von Bertrand Russell zunächst gescheitert ist.[14]

> Nachdem nun Frege „die formale Zahlenlehre ein für allemal abgetan“ hat, und nachdem er erkannt hat, daß auch sein Versuch die Zahlen logisch zu begründen (Seite 253. Nachwort) mißglückt ist, so haben wir nun gar keine Zahlen und müssen

[13] Frege spricht 1879 noch von „beurtheilbarem Inhalt“ (1879, 2, 4, 5, 13, 16, 98, 101). Erst später nimmt er die Unterteilung in „Sinn“ und „Bedeutung“ vor (vgl. Frege 1892).

[14] „Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. / In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte.“ (Frege 1903, 253)

nach ihm zu dem traurigen Schluß kommen

> Die Mathematik ist die unklarste aller Wissenschaften. (Thomae 1906, 438).

Frege konzentriert sich in seiner ersten Reaktion 1906 auf die Abgrenzung seiner inhaltlich verstandenen Arithmetik von der formalen Auffassung Thomaes. Auf die Angebote von Thomae Aspekte des Schachs wie Mattaufgaben, ersticktes Matt etc. in die Betrachtung einzubeziehen, geht Frege nicht ein. Überhaupt berücksichtigt Frege in seiner ersten Erwiderung die direkten Bezüge zum Schach nicht. Zudem wird sein Ton rauher:

> Ich bin überzeugt, mit meiner Kritik der Thomaeschen formalen Arithmetik diese für immer vernichtet zu haben, und in dieser Überzeugung kann mich die Ferienplauderei des Herrn Thomae [...] nur bestärken. [...] Und wie verfährt er in dieser Plauderei? Er wiederholt seine Behauptungen, ohne meine Gegengründe auch nur anzuführen. Meine Unterscheidungen – z. B. von Figuren und Zeichen, von Spiel und Theorie des Spiels – unterschlägt er und verdunkelt dadurch das wieder, was ich aufgehellt hatte. (Frege 1906, 587).

> Es gibt, wie es scheint, Menschen, von denen logische Gründe abgleiten wie Wassertropfen von einer Öljacke. Auch gibt es wohl Meinungen, die obwohl wiederholt widerlegt, und obwohl nie ein ernstlicher Versuch gemacht ist, diese Widerlegung zu widerlegen, sich immer und immer wieder breit machen, als ob nichts geschehen wäre. Ich bedauere, kein parlamentarisch und literarisch zulässiges Mittel zu kennen, diese Meinungen so in ihre Schlupfwinkel zu scheuchen, daß sie nie wieder ans Tageslicht hervorzukommen wagen. (ebenda 588)

Offenbar lag Thomae Freges „Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae“ bereits in Teilen vor deren Veröffentlichung vor, so dass er unmittelbar darauf mit einer Erklärung reagieren konnte, die direkt im Anschluss an Freges Text mit dem Datum „11. November 1906“ abgedruckt wurde, wobei Freges Text kein gesondertes Datum zugewiesen wurde. Thomae verfolgt zwei Ziele: (1) Er geht nun doch auf die Unterscheidung zwischen Spiel und Theorie des Spiels ein, wobei ihm bereits klar ist, dass er damit gänzlich andere Interessen verfolgt als Frege. (2) Er will den Disput beenden:

> Diese Zeilen wurden geschrieben, nach Einsicht der ersten vier Seiten der Fregeschen Streitschrift [= Frege 1906]. Ich bitte die Redaktion um Gewährung von Platz für meine Erwiderung, ehe ich den Rest der Polemik kenne. Ich werde ja auf keinen Fall darauf eingehen, und brauche deshalb das Ende nicht abzuwarten.
> Wenn ich erkläre, auf die Schrift Freges keine Entgegnung folgen zu lassen, so behalte ich mir doch vor, falls ich noch eine neue Auflage meiner elementaren Funktionentheorie erleben sollte, in deren Einleitung die Zahlenfrage etwas behandelt wird, auf den oder jenen Einwurf des Herrn Frege dort zurückzukommen.[15]

Seine Argumentation zu (1) leitet er wie folgt ein:

> Es wäre eine besondere Erklärung von mir auf den Aufsatz des Herrn Frege nicht nötig gewesen, wenn er darin nur sachlich vorgegangen wäre, ich meine, wenn er nur meinen Intellekt in Frage gestellt hätte. Er beschuldigt mich aber auch der Unterschlagung. Ich habe unterschlagen, daß Herr Frege das Schachspiel in Spiel und Theorie spaltet. (Thomae 1906b, 591)

Er vergleicht zunächst das Billardspiel mit dem Schachspiel. Das Billardspiel zeichne sich durch eine *Kunst* und eine *Theorie* des Spiels aus. Die Theorie ist für ihn letztlich eine physikalische Theorie, die die Bewegungsmöglichkeiten von Billardkugeln erfasst. Zudem ist die Kenntnis dieser Theorie für den Spieler belanglos:

> Der Spieler kümmert sich wohl wenig um die Theorie, er betreibt das Spiel als eine Kunst, die er durch Übung erlangt hat. Aber die Theorie ist da. (ebenda)

Thomae postuliert, dass zu seiner Zeit zwar noch keine Theorie des Schachspiels vorliegt, Ansätze zur Aufstellung einer mathematischen Theorie des Schachs seiner Meinung nach jedoch vorhanden sind, allerdings außerhalb der Betrachtung bleiben sollen. Überhaupt hinterfragt Thomae kritisch die Bedeutung des Wortes „Theorie“:

---

[15] Offenbar konnte Thomae das Projekt einer dritten Auflage nicht realisieren.

> Wenn in einem (älteren) Schachbuche steht: „Das Allgaier Gambit[16] pflegt für das praktische Spiel mindestens auszureichen. Im theoretischen Sinne hat sich die Frage nach dem Werte dieses Angriffes noch nicht erledigen lassen“ was ist da unter „theoretisch“ zu verstehen? (Thomae 1906b, 592)

Das Wort „Theorie“ wird hier eher im Sinne einer *Strategie* des Schachs verwendet. Thomae betrachtet nun das *praktische* Schachspiel als *gebundenes* Spiel:

> Das praktische Spiel ist ein gebundenes Spiel. Entweder wird ausdrücklich festgelegt, wieviel Zeit jeder Spieler auf einen Zug verwenden darf, oder es wird stillschweigend als Anstandsregel angenommen, daß ein Spieler eine angemessene Bedenkzeit nicht überschreite. Sonst könnte sich jeder Spieler einer Niederlage dadurch entziehen, daß er am Zuge so lange nachdenkt, bis der Gegner die Geduld verliert, und das Spiel aufgibt. Die Theorie aber ist das ungebundene, das freie Spiel. Will jemand den Wert einer Zugfolge theoretisch studieren, so spielt er, nimmt sich zu jedem Zuge so viel Bedenkzeit als er will, nimmt auch einen getanen Zug so oft er will zurück, um ihn durch einen anscheinend bessern zu ersetzen. Daß der Theoretiker über eine gewonnene Stellung ein Urteil fällt, unterscheidet ihn nicht vom Praktiker, nur daß der letztere sich noch öfter darin irren wird als der erstere. Beweise werden in der Theorie ob oculos dadurch geführt, daß ein Spiel so weit und so oft durchgeführt wird, bis der Beweis des behaupteten Satzes erbracht ist. Jedes Problem (Endspiel) kann als Lehrsatz ausgesprochen werden, der durch das Spiel erwiesen wird. Ein Endspiel aber ist eine Stellung, die (nebenbei) einen Gedanken ausdrückt. (ebenda 592)

Diese Unterscheidung von Thomae wendet sich gegen eine Reduktion des Schachs auf Schach*partien* und deren logische Möglichkeiten. Es gibt andere Schach*praxen* im Zusammenhang mit der Beurteilung von Schacheröffnungen, Schachstellungen, die wiederum in Partien überprüft werden

[16] Das Allgaier Gambit bezeichnet eine bestimmte Eröffnungsvariante im Schach, die nach dem Schachspieler Johann Baptist Allgaier (1763–1823) benannt wurde, der die Zugfolge 1. e2-e4, e7-e5, 2. f2-f4 (Königsgambit), e5xf4 (angenommenes Königsgambit), 3. Sg1-f3, g7-g5, 4. h2-h4, g5-g4, 5. Sf3-g5 untersuchte, wobei die Fortsetzung 5. …, h7-h6 zum Springeropfer (Springergambit) 6. Sg5xf7, Ke8xf7 führt. Weiß opfert Material gegen einen Stellungsvorteil.

können. Diese Betrachtung ist einerseits nicht mehr frei von Empirie. Andererseits wird auch klar, dass die Regeln, die z. B. den Begriff *korrekter Zug* bestimmen, mit der jeweiligen Praxis variieren. In einer Partie ist es nicht zulässig, einen korrekt ausgeführten Zug zurückzunehmen, bei der Beurteilung des Wertes einer Zugfolge schon.

Ungeachtet der Tatsache, dass Thomae bereits verkündet hatte, dass er diese Diskussion nicht fortsetzen wird, da offenbar die Standpunkte zu weit auseinanderliegen, veröffentlicht Frege 1908 „Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen“. Er wiederholt seine Grundüberzeugung:

> Der formalen Arithmetik gegenüber steht die inhaltliche. Sie unterscheiden sich, wie folgt. In der inhaltlichen Arithmetik sind die Zahlzeichen wirklich Zeichen, bloße Hilfsmittel der Forschung, dazu bestimmt, Zahlen zu bezeichnen, wobei diese die unsinnlichen Gegenstände der Wissenschaft sind. In der formalen Arithmetik sind die Zahlzeichen selbst die Zahlen, nicht bloße Hilfsmittel, sondern Gegenstände der Forschung. (Frege 1908a, 52)

Frege geht auf die neuen Aspekte in den Argumenten von Thomae nicht ein. Er erachtet diese offenbar als irrelevant für seine Zielstellung und wiederholt im Wesentlichen Argumente, die er in den *Grundgesetzen II* bereits vorgetragen hatte. Zusammenfassend stellt er fest:

> Hinsichtlich des Rechenspiels haben wir ,demnach festgestellt:
>
> 1. Es wird uns nicht vollständig gesagt, mit welchen Spielgegenständen wir es zu tun haben.
>
> 2. Es ist völlig im Dunkeln gelassen, worin die Spielhandlungen bestehen.
>
> Über diese beiden Punkte müßte leicht ins klare zu kommen sein, wenn uns die Spielregeln mitgeteilt würden; aber
>
> 3. was uns als Spielregeln dargeboten wird, hebt uns über jene Zweifel nicht hinweg. Diese Formeln sind in der formalen Arithmetik sinnlos. Um ihnen einen Sinn zu geben, müßte man die inhaltliche Arithmetik in ihrer Ausdehnung auf negative, gebrochene usw. Zahlen heranziehen, was erstens unstatthaft ist und zweitens keine Regeln ergeben würde.

Die letzten knappen Wortmeldungen finden sich auf derselben Seite der Jahresberichte wieder. Zunächst meldet sich doch noch einmal Thomae zu Wort:

> Daß ich in eine Polemik mit Herrn Frege nicht eintreten werde, habe ich bereits mit Angabe von Gründen erklärt. Ich muß aber hier die Ehre von mir ablehnen, eine formale Arithmetik erfunden zu haben. Diese ist mir zuerst bei Hankel in seiner „Theorie der komplexen Zahlensysteme“ begegnet. Hankel zitiert als einen Vorgänger Ohm. Ich habe nur mit mehreren anderen versucht, die formale Arithmetik auf irrationale Gebilde anzuwenden. (Thomae 1908, 56)

Doch Frege behält das letzte Wort:

> In dem oben stehenden Aufsatze [Frege 1908a] habe ich eine Theorie sachlich und ernsthaft bekämpft. Wenn Herr Thomae dagegen etwas einzuwenden weiß, so ist es seine Pflicht, das zu tun. Damit hinter dem Berge zu halten, dafür gibt es überhaupt keinen stichhaltigen Grund, es sei denn andauernde Schwäche. Eine Lehre, die, ernsthaft angegriffen, nicht mehr verteidigt wird, muß nach den allgemeinen Grundsätzen des wissenschaftlichen Betriebes als widerlegt gelten. (Frege 1908b, 56)

Es ist ein wissenschaftshistorisch bemerkenswerter Umstand, dass eine solche Kontroverse einschließlich ihres polemischen, teilweise sehr persönlichen Charakters Eingang in die zwei Jahrgänge der *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* gefunden hat. Hervorzuheben ist auch, dass zuweilen zumindest Teile der Texte bereits dem jeweiligen Opponenten bekannt waren. Wir können hier eine Kontroverse in aller Intensität mitverfolgen, wobei diese Auseinandersetzung mit Blick auf philosophische Betrachtungen der Mathematik und Logik von höchster Aktualität ist

Es ist nicht gänzlich auszuschließen, dass Frege später der Möglichkeit, eine formale Arithmetik korrekt aufzubauen, zumindest nicht mehr mit dieser Vehemenz ablehnend gegenüber stand. Lothar Kreiser schreibt hierzu:

> 1936 berichteten Heinrich Scholz (1884–1956) und Friedrich Bachmann (1909–1982) auf dem Congrès International de Philosophie Scientifique in Paris über den wissenschaftlichen

> Nachlaß Freges. Es sei, so führten sie aus, Leopold Löwenheim (1878–1957) gelungen, Frege brieflich davon zu überzeugen, daß sich die formale Arithmetik korrekt aufbauen lasse. L. Löwenheim habe sich dabei auf Freges eigene Aussage in dessen § 90 des zweiten Bandes der »Grundgesetze der Arithmetik« gestützt, daß man die Begriffsschrift auch als Kalkül aufbauen könne, in dem deduktiv mit zulässigen Zeichenreihen gespielt werde (. . .). Der Briefwechsel, der 1909 stattfand, ist leider verloren gegangen. Spätere Äußerungen Freges über die formale Arithmetik, sei es in Publikationen, nachgelassenen Arbeiten oder in seinen Tagebuchnotizen, lassen von dieser Überzeugung nichts erkennen. Vielleicht liegt die Sache so, daß Frege ihr als Theorie des Spiels mit Zahlzeichen eine Chance einräumte, bei ihren Vertretern aber eine solche Einsicht vermißte, so daß er an seiner Kritik festhielt. (Kreiser 2001, 234 f.)

4. Einige Schlussbemerkungen aus heutiger Sicht

Die Position der *formalen* Arithmetik bzw. der *formalen* Logik ist in die *rein syntaktische* Form des *uninterpretierten* Hilbert-Kalküls eingegangen. Grundlage derartiger logischer Systeme ist zunächst ein Regelwerk, welches den Begriff *wohlgeformte Formel* [WFF] rekursiv definiert und zudem ein Entscheidungsverfahren liefert, ob eine beliebige Zeichenkette eine Formel ist oder nicht. Wir können ein solches Regelwerk Kodex$_{WFF}$ nennen.

Darauf aufbauend können wir eine *axiomatische Basis* angeben, die üblicherweise in der Angabe einer (endlichen) Menge ausgezeichneter, unbewiesen vorausgesetzter wohlgeformter Formeln – meist *Axiome* genannt – und einer Menge von *Schlussregeln* besteht, die den Umgang mit den Axiomen vollständig bestimmt. Wir können ein solches Regelwerk Kodex$_{AB}$ nennen. Die Angabe von Kodex$_{AB}$ können wir als die *implizite Definition* der logischen Eigenschaften aller im Kodex$_{AB}$ vorkommenden logischen Konstanten auffassen. Zugleich können wir auf diese Weise den Begriff *Theorem* bestimmen: Ein Theorem ist entweder selbst ein Axiom oder wurde unter alleiniger Verwendung der Schlussregeln in endlich vielen Schritten aus den Axiomen generiert. Diese Bestimmung ist in dem Sinne *intern*, als dass wir dazu keinen weiteren Kontext, insbesondere keinen Bezug auf eine Bedeutung bzw. Interpretation benötigen. Kodex$_{WFF}$

stellt allerdings für Kodex$_{AB}$ eine Beschränkung dar, als dass Schlussregeln nicht zulässig sind, die von WFF-Axiomen zu Zeichenketten führen, die nicht wohlgeformt sind.

Freges Kritik an der formalen Auffassung der Arithmetik bzw. der Logik richtet sich wohl nicht gegen den Kodex$_{WFF}$, sondern dagegen, dass die alleinige Angabe eines Kodex$_{AB}$ bereits für eine vollständige Charakterisierung eines *Inhalts* ausreicht. Die Bestimmung von Sinn und Bedeutung läge dann nur formal vor. Wenn „$3^2 + 4^2 = 24$" eine Instanz für den wohlgeformten Ausdruck der Form „$a + b = c$" ist, dann benennt „$3^2 + 4^2 = 24$" das Falsche. Aus formaler Sicht könnten wir dafür plädieren, dass dieser Ausdruck nicht wohlgeformt ist. Die Konsequenz für Kodex$_{WFF}$ wäre die Wohlgeformtheit von „$a + b = c$" an gewisse Bedingungen für „a", „b" und „c" zu koppeln. Eine Analogie zum Schach wäre entweder (a) jede Anordnung von Schachfiguren auf dem Brett als wohlgeformt anzusehen[17] oder (b) z. B. nur solche Anordnungen zuzulassen, die korrekt aus der Ausgangsstellung erreicht werden können. Eine Änderung der Ausgangsstellung würde dann Einfluss darauf haben, was als *wohlgeformte* Anordnung gilt.

Schließlich können wir einen weiteren Kodex$_{INT}$ angeben, der uns mit Bezug auf beliebige wohlgeformte Formeln eine *Interpretation* liefert. Auch dieser baut somit auf Kodex$_{WFF}$ auf und bestimmt die Begriffe *Gültigkeit*, *Neutralität* bzw. *logische Widersprüchlichkeit* von Formeln erneut in der oben angegebenen *internen* Weise.

Freges Auffassung einer inhaltlichen Arithmetik bzw. Logik besteht nun darin, dass es überhaupt keinen Sinn macht, eine Unterteilung in einen Kodex$_{AB}$ und einen Kodex$_{INT}$ vorzunehmen. Das Aufstellen von *Grundgesetzen* in seiner *Begriffsschrift* ist nicht nur die Auszeichnung bestimmter wohlgeformter Formeln, sondern immer zugleich die Angabe von *gültigen* Formeln. Es sind *Gesetze des Wahrseins*. Allerdings benötigt und akzeptiert Frege dennoch eine Abgrenzung zum Kodex$_{WFF}$. Die Ausdrückbarkeit der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten in Freges *Grundgesetzen* führt zur Inkonsistenz seiner inhaltlichen Logik, was letztlich nur besagt, dass die durch Kodex$_{WFF}$ charakterisierte Menge von Zeichenketten und die durch Kodex$_{AB}$ bzw. Kodex$_{INT}$ bestimmten Mengen zusammenfallen. Aus Freges Sicht bedeutet dies, dass es Glei-

[17] Dies würde auch die Fälle erfassen, in denen z. B. nur ein weißer Springer auf dem Brett steht und sonst nichts. Solche Stellungen verwenden wir im Schachunterricht, wenn trainiert werden soll, welche Zugmöglichkeiten ein Springer im Prinzip hat.

chungsätze gibt, die lückenlos aus seinen Grundgesetzen beweisbar sind, wobei deren Namen das Falsche bedeuten.

Schachanalogien sind nun in der Weise attraktiv – und einige Bemerkungen von Thomae legen es nahe –, dass sich Schach nur bei einer sehr einseitigen Betrachtung auf genau einen Kodex bezieht. Zumeist meint man hier nur den durch ein Regelwerk – nennen wir es Kodex$_{ZUG}$ – intern (kontextfrei) bestimmbaren Begriff *korrekter* Schachzug. Damit ist so etwas gemeint wie die Bestimmung sämtlicher Zugmöglichkeiten aller Figuren in jeder beliebigen Anordnung von Figuren durch das Regelwerk in seiner Gesamtheit und noch ohne Bezug auf die Ausgangsstellung. Das schließt allerdings die Möglichkeit ein, dass überhaupt kein Zug ausgeführt werden kann wie z. B. in Matt- bzw. Pattstellungen oder auch einer Anordnung von Figuren, die in gewisser Weise keine Schachstellung ist: z. B. wenn es keine Könige auf dem Brett gibt. Wir könnten Kodex$_{ZUG}$ auch dann verwenden, wenn die Stellung nicht regulär in einer beliebigen Schachpartie entstanden sein kann. Es gibt z. B. Anordnungen von Figuren in Schachaufgaben der Form „Matt in n Zügen", von denen gezeigt werden kann, dass sie nicht aus der Ausgangsstellung mittels Kodex$_{ZUG}$ generiert werden können.

Wir benötigen somit einen Kodex$_{STELLUNG}$ für den Begriff *Schachpartiestellung*. Die Bestimmung von Kodex$_{ZUG}$ ist unabhängig vom Begriff *Ausgangsstellung* mit Blick auf beliebige Schachpartien. Für jede Anordnung von Schachfiguren gilt: Sie ist eine *Schachpartiestellung* genau dann, wenn sie in einer endlichen Folge korrekter Züge gemäß Kodex$_{ZUG}$ aus der Ausgangsstellung erreichbar ist. Wenn wir von jeder Anordnung von Figuren bestimmen können, ob dies eine Schachpartiestellung ist oder nicht, dann verfügen wir hier sogar über ein *Entscheidungsverfahren*.

Es sei vermerkt, dass es im Schach weitere Kodizes gibt. Z. B. regelt der Artikel 4 der *FIDE Laws of Chess*, die ausdrücklich nur für das „over-the-board play" (und damit z.B. nicht für Computerschach) gelten, die *Ausführung* der Züge („The act of moving the pieces"), wobei dieser Artikel neben den Artikeln 1 „The nature and objectives of the game of chess", 2 „The initial position of the pieces on the chessboard", 3 „The moves of the pieces" und 5 „The completion of the game" zu den *Basic Rules of Play* gehört.

Es ist aus Sicht der Analogie zum Schach eine äußerst interessante Frage, wie sich die verschiedenen Kodizes des Schachs zu den genannten logischen Kodizes bzw. zu Freges Auffassung einer *inhaltlichen* Logik verhalten. Frege selbst macht hierfür ein Angebot:

> Nun ist es ja ganz richtig, dass wir unsere Regeln des Schliessens und die andern Gesetze der Begriffsschrift auch hätten einführen können als willkürliche Festsetzungen, ohne irgend von der Bedeutung und dem Sinne der Zeichen zu sprechen. Die Zeichen würden dann eben als Figuren behandelt. Was uns als äussere Darstellung eines Schlusses galt, wäre dann einem Zuge des Schachspiels vergleichbar, nur der Uebergang von einer Figurenstellung zu einer anderen, ohne dass dem ein Uebergang von einem Gedanken zu einem andern entspräche. Man könnte jemandem unsere Formeln I bis VI und die Definitionen A bis H des ersten Bandes als Ausgangspunkte geben – vergleichbar der Grundstellung der Schachfiguren –, ihm die Regeln sagen, nach denen er Umformungen vornehmen dürfte, und nun die Aufgabe stellen, unsern Satz (71) des ersten Bandes von jenen Ausgangspunkten aus zu erreichen; alles dies, ohne dass er eine Ahnung von Sinn und Bedeutung dieser Zeichen hätte, noch von den Gedanken, deren Ausdruck die Formeln sind. Es wäre sogar denkbar, dass diese Aufgabe ebenso gelöst würde, wie wir es gethan haben. Dass dabei geistige Arbeit geleistet werden müsste, versteht sich von selbst, ebenso wie bei einer ähnlichen Aufgabe des Schachspiels, von einer Grundstellung aus zu einer gegebenen Endstellung gemäss den Regeln des Spiels [Kodex$_{ZUG}$] zu gelangen, wobei von Gedanken, die durch die verschiedenen Stellungen ausgedrückt würden, keine Rede wäre, und kein Zug als Schluss gedeutet werden könnte. (Frege 1903, § 90, 99 f.)

Frege nimmt hier probehalber den *syntaktischen* Standpunkt ein, indem er zunächst scheinbar auf die Berücksichtigung des Sinnes und der Bedeutung verzichtet. Dann wäre die Entsprechung von Zeichen und Schachfiguren akzeptabel. Er bezeichnet seine Grundgesetze nunmehr als „Formeln“ und postuliert, dass diese sechs Formeln zusammen mit seinen acht Definitionen der „Grundstellung der Schachfiguren“ entsprechen könnten. Die Schlussregeln wären dann analog zu Kodex$_{ZUG}$ („den Regeln des Spiels“). Wir könnten dann die Aufgabe, einen bestimmen Satz zu beweisen (eine Formel als Theorem zu erweisen), als gleichartig zu der Aufgabe, eine bestimmte Anordnung von Figuren als Schachpartiestellung („eine gegebene Endstellung“) gemäß Kodex$_{STELLUNG}$ nachzuweisen, auffassen. Natürlich muss Frege diese Version einer formalen Auffassung zurückweisen, wobei sein Gegenargument nicht unbedingt restlos überzeugt:

> Obwohl also geistige Arbeit geleistet würde, fehlte doch ganz der Gedankengang, der bei uns die Sache begleitet und ihr eigentlich erst Interesse verliehen hat. Möglich mag es sein, aber kaum vortheilhaft; dürfte die Aufgabe doch durch Abwehr der Gedankenbegleitung nicht leichter, sondern bedeutend schwerer geworden sein. (Frege 1903, § 90, 100)

Soweit wir sehen können, betrachtet Frege andere Fälle von berechenbaren Aufgabenstellungen, in denen eine bestimmte Anordnung von Figuren – möglicherweise unabhängig von der Frage, ob es sich überhaupt um eine Schachpartiestellung handelt – geben ist, nicht. Dazu gehören Fälle des *Problem*schachs wie z. b. „Matt in 4 Zügen". Hier ist das Ziel nur in Ausnahmefällen eine ganz konkrete Anordnung von Figuren zu erreichen. Meist genügt es nach 4 Zügen stets solche Figurenanordnungen zu erreichen, die zwar voneinander verschieden sein können, aber alle gleichermaßen *Mattstellungen* sind. Es wäre dann umgekehrt eine interessante Frage, ob hierzu Analogiebetrachtungen in Richtung Logik angestellt werden könnten.

Bis etwa in die Mitte des 20. Jahrhunderts gab es eine sehr starke Tendenz, die Aufstellung eines axiomatischen Systems – die Angabe von Kodex_{WFF} und Kodex_{AB} – bereits ohne die Angabe einer separaten Interpretation für die *vollständige* Formulierung einer Logik zu halten. Die Angabe alternativer nichtäquivalenter Varianten eines Kodex_{AB} zu ein und demselben Kodex_{WFF} wurde attraktiv. Ein Beispiel dafür sind die verschiedenen S-Systeme monomodaler monadischer Aussagenlogiken[18] von Lewis & Langford. An die Stelle inhaltlicher Überlegungen zu Operatoren für „es ist notwendig, dass …" traten Kriterien der Intuition oder auch möglicher Lesarten für unterschiedliche Anwendungen. Im Kontext von Zeit kann ein solcher Operator z.B. als „es ist immer in der Zukunft der Fall, dass …" gelesen werden. Mit der Entwicklung mächtiger (semantischer) Modelltheorien und algebraischer Semantiken ging ein Umdenken einher, dass Logiken erst dann vollwertig sind, wenn sie auch eine Semantik haben, wobei als Idealfall *Adäquatheit* angestrebt wird. Dies können

[18] Die Sprache modaler Aussagenlogiken ist *monomodal*, wenn sie genau einen undefinierten Modaloperator „$\otimes$" enthält. Sie ist zudem *monadisch*, wenn dieser undefinierte Modaloperator *einstellig* ist, d. h. wenn Kodex_{WFF} folgende Regel enthält: Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\otimes A$ eine Formel.

wir knapp so ausdrücken, dass Kodex$_{AB}$ und Kodex$_{INT}$ dasselbe leisten.[19] Sollte bereits ein Kodex$_{INT}$ zu einem Kodex$_{WFF}$ vorliegen, dann wird die ergänzende Suche nach einem adäquaten Kodex$_{AB}$ in der Frage nach der *Axiomatisierbarkeit* artikuliert.

Von Freges Position einer *inhaltlichen* Logik aus ist die Aufspaltung des Projektes in zwei separate Teilprojekte nicht akzeptabel. Seine Sichtweise erlaubt eine solche Aufspaltung nicht. Das moderne Streben nach *Adäquatheit* lässt sich allerdings als ein Projekt auffassen, letztlich über die Zusammenführung syntaktischer und semantischer Bestrebungen wieder zu Freges Position einer *inhaltlichen* Logik zu gelangen. Ein Vertreter, der eine Logik erst dann als eine echte formale Theorie ansieht, wenn Adäquatheit bewiesen wurde, könnte wie Frege die rein formale Position kritisieren, allerdings von einer gänzlich anderen Ausgangsposition aus. Er würde dieser Position nicht verwerfen, sie aber letztlich nur als Zwischenstation zu einer vollwertigen inhaltlichen Logik ansehen.

Bezogen auf die Vielfalt der Analogiebeziehungen zwischen Schach und Logik stehen wir vor dem Problem, inwieweit wir einander entsprechende Kodizes angeben können. Was entspricht Kodex$_{WFF}$ im Schach? Die Frage nach der logischen Fassung eines Regelwerks für den Begriff „korrekt *ausgeführter* Zug" ist die Frage nach einer spezifischen *Handlungslogik*. Programmatisch gesprochen, können wir aus dem Vergleich der Vielfalt von Kodizes in Schach, Arithmetik und Logik sicher einiges über deren Spezifika und wechselseitige Abhängigkeit lernen sowie uns zur Erfindung neuer Regelwerke inspirieren lassen.

Literaturverzeichnis

[1] **Dathe, U.**: *Frege in Jena.* Dissertation A, Universität Leipzig 1992.

[2] **Dathe, U.**: Gottlob Frege und Johannes Thomae. Zum Verhältnis zweier Jenaer Mathematiker. In: Gabriel, G. & W. Kienzler (Hrsg.), *Frege in Jena. Beiträge zur Spurensuche. Kritisches Jahrbuch der Philosophie* **2**, Thüringische Gesellschaft für Philosophie Jena, Würzburg: Königshausen und Neumann, 87–103 (1997).

[3] **FIDE Laws of Chess** [taking effect from 1 January 2018]. `https://www.schachschiri.de/fide_18_eng.pdf`.

[4] **Frege, G.**: *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle a. S. Verlag von Louis Nebert 1879.

[19] Jede Formel die gemäß Kodex$_{WFF}$ wohlgeformt ist, ist genau dann ein Theorem gemäß Kodex$_{AB}$, wenn sie eine Tautologie gemäß Kodex$_{INT}$ ist.

[5] **Frege, G.**: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.*. Breslau: Wilhelm Koebner 1884.

[6] **Frege, G.**: Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 25-50 (1892).

[7] **Frege, G.**: *Grundgesetze der Arithmetik. Band I.* Jena: Hermann Pohle 1893.

[8] **Frege, G.**: *Grundgesetze der Arithmetik. Band II.* Jena: Hermann Pohle 1903.

[9] **Frege, G.**: Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **15**, 586-590 (1906).

[10] **Frege, G.**: Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **17**, 52-55 (1908).

[11] **Frege, G.**: Schlussbemerkung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **17**, 56 (1908).

[12] **Frege, G.**: *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges.* Mit Einleitungen, Anmerkungen und Register herausgegeben von G. Gabriel, F. Kambartel und C. Thiel. Hamburg: Meiner 1980.

[13] **Göpfert, H.**: *Carl Johannes Thomae und die Entwicklung der Mathematik an der Universität Jena 1879 bis 1914. Fundamente und Einflüsse.* Rudolstadt: Hain 2002.

[14] **Hilbert, D.**: *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig: Teubner 1899.

[15] **Kreiser, L.**: Einleitung zum Anhang *N*achschrift einer Vorlesung und *P*rotokolle mathematischer Vorträge Freges (unter Mitwirkung von Günter Grosche). In: G. Frege, *N*achgelassene Schriften. Unter Mitwirkung von G. Gabriel und W. Rödding bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von H. Hermes, F. Kambartel und F. Kaulbach. Zweite, revidierte Auflage. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 327-346 (1983).

[16] **Kreiser, L.**: *Gottlob Frege – Leben, Werk, Zeit.* Hamburg: Felix Meiner Verlag 2001.

[17] **Max, I.**: Zur Rolle von Schachanalogien in Wittgensteins Philosophie ab 1929. In: R. Raatzsch (Hrsg.), Spezialsektion: Wittgenstein über das Psychische, *Wittgenstein-Studien* **11**, 183-206 (2020), https://doi.org/10.1515/witt-2020-0010.

[18] **Stelzner, W.**: *Gottlob Frege. Jena und die Geburt der modernen Logik.* Verein zur Regionalförderung von Forschung, Innovation und Technologie für die Strukturentwicklung e. V., Jena: ReFIT 1996.

[19] **Thomae, C. J.**: *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen.* Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle a. S.: Verlag von Louis Nebert 1880.

[20] **Thomae, C. J.**: Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle a. S.: Verlag von Louis Nebert 1898.

[21] **Thomae, C. J.**: Gedankenlose Denker. Eine Ferienplauderei. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **15**, 434-438 (1906).

[22] **Thomae, C. J.**: Erklärung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **15**, 590-592 (1906).

[23] **Thomae, C. J.**: Bemerkung zum Aufsatze des Herrn Frege. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **15**, 56 (1908).

Autor

Prof. Dr. phil. habil. Ingolf Max
Universität Leipzig
Institut für Philosophie
Abteilung Logik und Wissenschaftstheorie
Beethovenstraße 15
D-04105 Leipzig
E-Mail: max@uni-leipzig.de

Diskussionen und abschließende Bemerkungen

Die Aktivitäten des Gottlob-Frege-Zentrums wurden allgemein gewürdigt. Auch die künftigen Projekte lassen hoffen, dass das Erbe von Frege an der Hochschule Wismar weiterhin engagiert gepflegt wird.

Das Romanprojekt zu Gottlob Frege fand großes Interesse. Die Leseprobe aus den Anfängen des Projektes zeigte insbesondere, welche Prägungen Frege schon im Elternhaus erfahren hatte. Die Zuhörer waren beeindruckt. Weitere Lesungen werden mit Spannung erwartet.

Nach dem Festvortrag von Prof. Max wurde eifrig diskutiert. Fragen waren z.B.:

- In welchem Verhältnis stehen die Schachanalogien Thomaes und das formalistische Programm Hilberts?
- Handelt es sich bei den Analogien nicht um einen konstruktivistischen Ansatz mit Verbot des aktual Unendlichen, während Hilbert das aktual Unendliche bewusst zuließ?

Die Bezüge zum Schach fanden darüber hinaus regen Zuspruch, zumal Spieltheorie und Künstliche Intelligenz wichtige Forschungsgebiete darstellen. Hier eröffnete sich die Möglichkeit eines weiteren Vortrages von Prof. Max an der Hochschule in Wismar. Auch eine weitere Zusammenarbeit zu den aufgeworfenen Fragen ist durchaus vorstellbar.

Prof. Lämmel dankte den Teilnehmern des Festkolloquiums und insbesondere den Vortragenden. Nach reichlich zwei Stunden beendete er das Kolloquium.

Dieter Schott

WFR - Wismarer Frege-Reihe / Wismar Frege Series
ISSN 1862-1767

WFR-Publikationen zu Gottlob Frege

Heft 02/2006	Bertram Kienzle: Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege, Juni 2006.
Heft 03/2006	Dieter Schott (Hrsg.): Wanderungen zu Ehren von Gottlob Frege – Ein Resümee nach 20 Jahren, November 2006.
Heft 01/2008	Dieter Schott (Hrsg.): Gottlob Frege – Leistungen und Wirkungen, Frege-Kolloquium zum Hochschuljubiläum, Juni 2008.
Heft 02/2008	Heinz-Helmut Bernd: Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel, November 2008.
Heft 01/2009	Dieter Schott (Hrsg.): Gottlob Frege – Mathematiker, Logiker und Philosoph, Sonderheft für Frege-Preisträger, Juli 2009.
Heft 05/2009	Bertram Kienzle: Frege und die Zahlen, Juni 2009.
Heft 01/2010	Lothar Kreiser: Die Freges aus Wismar, Juni 2010.
Heft 04/2010	Achim Trebeß (Hrsg.): Gottlob Freges politisches Tagebuch und die Hochschule Wismar - die zu kurze Geschichte einer Diskussion, Juni 2010.
Heft 01/2011	Harald Thrams: Denkt doch einmal logisch! Wissenswertes und Nachdenkliches über die Mathematik, über die Logik und über Gottlob Frege, Januar 2011.
Heft 02/2013	Dieter Schott (Ed): Contributions dedicated to FREGE on the occasion of the 3rd International Gottlob Frege Conference in Wismar.
Heft 03/2015	Christian Frege: Familie und Abstammung von Professor Gottlob Frege, Dezember 2015.
Heft 03/2016	Dieter Schott: Mit dem Drahtesel auf Freges Spuren. Eine Kultur- und Bildungsreise der besonderen Art. Tabea Rohr: Einleitungsvortrag zu Gottlob Frege, Mai 2016.
Heft 01/2020	Dieter Schott: Das Mathematikabitur von Gottlob Frege, Dezember 2020.
Heft 03/2020	Dieter Schott (Hrsg.) Beiträge zum Festkolloquium „20 Jahre Gottlob-Frege-Zentrum“, Wismar, November 2020.

Herausgeber und Redakteur

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Gottlob-Frege-Zentrum
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D - 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 7333
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 7130
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Vertrieb:
Direkt über den Herausgeber oder das Gottlob-Frege-Zentrum

ISSN 1862-1767