Hochschule Wismar   Gottlob Frege Centre

Proceedings
5th Northern-Light Symposium
on Mathematical Education in Engineering

Diepholz, November 2024

Heft 04 / 2024

Wismarer Frege-Reihe   Wismar Frege Series

Das **Gottlob-Frege-Zentrum** wurde am 7.11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder setzen sich für eine wissenschaftlich begründete, praxisorientierte, moderne und international ausgerichtete Ausbildung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen ein.

Weitere Informationen zum Gottlob-Frege-Zentrum finden Sie im Netz unter

www.hs-wismar.de/frege

bzw. auf der Netzseite

https://www.hs-wismar.de/vernetzung/institutionen-hochschulunternehmen/gottlob-frege-zentrum/

ISSN 1862-1767

Printed in Germany

WFR Heft 04/2024

Inhalt / Contents

Light House – The glorious symbol of our projects

Vorwort

Das inzwischen fünfte "Northern Light Symposium" fand 2024 in Diepholz statt, in den Räumen der Privaten Hochschule für Wirtschaft und Technik (PHWT). Diepholz ist einerseits groß genug für einen eigenen Bahnanschluss, andererseits hinreichend klein, dass alle Teilnehmer die Hochschule vom Bahnhof aus zu Fuß erreichen konnten. Leider musste unser Nestor Dieter Schott krankheitsbedingt kurzfristig absagen, und so kamen gegen 13 Uhr folgende vier Teilnehmer zusammen:

Thomas Schramm (Hamburg)
Thomas Risse (Bremen)
Peter Junglas (Diepholz)
Markus Schmidt-Gröttrup (Osnabrück)

Nach einem Mittagessen in der Cafeteria der PHWT begann das Vortragsprogramm, das wie immer Zeit für ausgiebige Diskussionen ließ. Die Themen spannten einen großen Bogen von der Vergangenheit über die Gegenwart in die Zukunft:

Zunächst zeigte Thomas Risse, wie Bolzano mit der damaligen Ungenauigkeit mathematischer Begriffe rang, rigorose Definitionen und Beweise einforderte und damit wichtige Grundlagen der modernen Analysis legte. Der Vortrag von Dieter Schott fiel zwar leider aus, er hatte aber die Vortragsfolien geschickt, außerdem einen Abschnitt aus der in Entstehung begriffenen Roman-Biographie über Gottlob Frege. Darin konnten wir in spannender Weise nachlesen, wie das Bekanntwerden der Russellschen Antinomie Freges Werk erschütterte.

Mit Ideen für die gegenwärtige Mathematik-Ausbildung befassten sich die zwei folgenden Vorträge: Markus Schmidt-Gröttrup zeigte die Bedeutung der Catalan-Zahlen, die nicht nur viele Anwendungen in der Kombinatorik - und damit z. B. auch der Informatik - haben, sondern eine Unzahl sehr spannender Eigenschaften besitzen. Peter Junglas führte an praktischen Beispielen vor, dass zwischen den analytischen und numerischen Methoden in den Ingenieurwissenschaften noch viel Platz ist für nützliche Berechnungen mit Hilfe der "Speziellen Funktionen".

Thomas Schramm schließlich befasste sich mit aktuellen und zukünftigen Problemen bei der Anwendung von KI - speziell "Large Language Models" - in der Lehre. Er beleuchtete besonders die ethische Dimension, zeigte aber auch an amüsanten Beispielen, dass das Verständnis mathematischer Fragen in den Standard-ChatBots noch einiges zu wünschen übriglässt.

Das abschließende Essen fand im italienischen Restaurant "La Villetta" statt. Dabei wurden nicht nur die bisherigen Themen und allgemeinere Problemstellungen im Umfeld von Mathematik und Lehre engagiert diskutiert, sondern auch die wichtige Frage zum Veranstaltungsort des nächsten Symposiums. Nachdem im letzten Jahr "wahrscheinlich Bremen" avisiert wurde, planen wir für das nächste Jahr "wahrscheinlich Bremen".

Peter Junglas

Prof. Dr. Peter Junglas
Am Campus 2
49356 Diepholz

phwt
Die unternehmende
Hochschule für die Region

EINLADUNG

5th Northern-Light Symposium on Engineering Education 2024

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

ich lade Sie herzlich ein zu unserem fünften Northern-Light Symposium über mathematische Ausbildung im Ingenieurwesen an Hochschulen und angrenzende Themen am Freitag, 29. November 2024 an der PHWT in Diepholz.

Programm:

- 13:00 Uhr Mittagessen in der Cafeteria der PHWT
- 14:00-14:30 Prof. Dr. Dieter Schott, Hochschule Wismar: „Begriff - Funktion - Gegenstand: eine logische Untersuchung".
- 14:30-15:00 Prof. Dr. Thomas Risse, Hochschule Bremen: „Bolzano's ‚Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik' "
- 15:15-15:45 Prof. Dr. Schmidt-Gröttrup, Hochschule Osnabrück: „Nord-West-Quellen und die Catalan-Zahlen"
- 15:45-16:15 Prof. Dr. Thomas Schramm. HafenCity Universität: „Künstliche Intelligenz in der Lehre – Allgemeine und ethische Überlegungen".
- 16:30-17:00 Prof. Dr. Peter Junglas, Private Hochschule für Wirtschaft und Technik, Diepholz: „Spezielle Funktionen in den Ingenieurwissenschaften".
- 17:00-17:30 Prof. Dr. Dieter Schott, Lesung aus der noch unveröffentlichten Frege-Romanbiografie, Abschnitt „Die Antinomie"
- Ab 18:00 Abendprogramm

Mit freundlichen Grüßen

Peter Junglas

Bemerkungen des Herausgebers: Die Proceedings weichen in einigen Punkten vom Programm des Symposiums ab. Zum Beispiel hat Thomas Schramm zu seinem Vortrag keinen Beitrag eingereicht. Der zur Lesung vorgesehene Abschnitt ‚Die Anatomie' wurde von mir durch den Abschnitt ‚Zur logischen Struktur der Sprache' ersetzt.

Gruppenfoto

der Teilnehmer am 5. Nordlicht-Symposium in Diepholz

Was sagt das fehlende Wismarer Nordlicht zu dieser Vorstellung? Vier bebrillte und gestandene Wissenschaftler schauen mit entspannten, erwartungsvollen, frohen und gutmütigen Gesichtern dem Urteil entgegen.

„Großartig Leute, wie macht ihr das nur? Ich bin begeistert!", tönt es aus dem Äther. Mit schnarrender, antiquiert klingender Stimme folgt noch: „Summa cum laude. Benedicamus Symposium nostrum. Dux atque imperator vitae mortalium animus humanus est."

Thomas Risse

Begegnungen mit Bolzano

Zusammenfassung. Durch Zufall bin ich auf Bolzanos *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* [3] gestoßen. Das schon 1810 veröffentlichte Bändchen versucht, Theologie, Philosophie und Mathematik zu vereinen, und läßt viel von Bolzanos Interessen, Zielen, Ideen, Werten, Engagement, Stil und Charakter erkennen. Hier möchte ich aber vor allem Bolzanos mathematische Ergebnisse würdigen.

Einleitung

Bernard Bolzanos Biographie [18] zeigt, unter welch widrigen Umständen er gelehrt, geforscht und veröffentlicht hat, [9], [19].

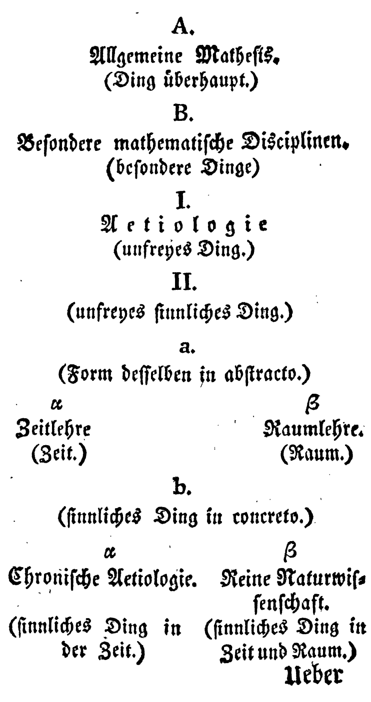
***5.10.1781**	in Prag als viertes von zwölf Kindern, röm.-kath.
1795 - 1800	Studium der Philosophie, Physik und Mathematik an der philosophischen Fakultät der Karls-Universität Prag
1805	Promotion zum Doktor der Philosophie, Priester-Weihe
1805	Lehrstuhl für Religionslehre „zur Bekämpfung der Freigeisterei unter der Jugend“
1818	Wahl zum Dekan der Philosophischen Fakultät der Karls-Universität Prag
1819	Entlassung wegen unorthodoxer, sozial-kritischer Vorlesungen und Sonntagspredigten
1820	der Karls-Universität verwiesen, unter Polizeiaufsicht gestellt, Redeverbot, Publikationsverbot, Post-Zensur
1825	Kirchen-Prozeß erzwingt Widerruf der Irrlehren und Abschwören der Häresien
1819 - 1842	'Exil' bei Freunden auf dem Land, beim Bruder in Prag
†18.12.1848	Tod in Prag

Mich erstaunt, dass Bolzano unter diesen repressiven Bedingungen so produktiv sein konnte (die Bolzano-Gesamtausgabe [9] umfaßt 133 Bände, von denen 19 Bände noch nicht erschienen sind). Viele seiner Werke wurden anonym oder erst posthum publiziert.
Bolzano äußert sich als Theologe, als Philosoph und als Mathematiker.
Bolzano gilt etwa Wolfgang Künne, im Vorstand der Internationalen

Bolzano-Gesellschaft, als „der größte Logiker zwischen Leibniz und Frege“ [15]. Detlef D. Spalt nennt ihn beziehungsreich 'The Republican Revolutionary of Analysis' [13]. Julian L. Coolidge urteilt „Wenn Bolzano der Mathematik nichts weiter gegeben hätte als seine Definition der stetigen Funktion, schon dies allein würde ihm einen Platz in der Geschichte dieser Disziplin sichern.“ [18]

Philosophisches

Bolzanos Beyträge [2] von 1810 können als Versuch verstanden werden, Mathematik und Philosophie zu vereinigen, zu versöhnen: Das erste Kapitel beantwortet die Frage „Was ist Mathematik?“ mit der für meinen Geschmack unbefriedigenden Antwort „Mathematik ist die Wissenschaft der Größen.“ (Beispielsweise die DMV bietet im Netz zehn verschiedene mehr oder weniger überzeugende Definitionen, oder besser Charakterisierungen.)
Im zweiten Kapitel räsoniert Bolzano Über die mathematische Methode und befasst sich etwa mit den Regeln des logischen Schließens. In einem Anhang setzt er sich ausführlich mit „der Kantischen Lehre von der Konstruktion der Begriffe durch Anschauungen“ auseinander.
Bolzano bezieht alle (ihm bekannten) Begriffsbestimmungsversuche ein und versucht, so allgemein wie möglich zu sein. Er berücksichtigt die Philosophie und grenzt sich zugleich von ihr ab. Allerdings geht der Wunsch nach größter Allgemeinheit mit größter Unbestimmtheit einher. Bolzanos Ausführungen wirken bisweilen weitschweifig, neue Begriffsbestimmungen führen m.E. eher zu neuen Unklarheiten.



A.
Allgemeine Mathesis.
(Ding überhaupt.)
B.
Besondere mathematische Disciplinen.
(besondere Dinge)
I.
Aetiologie
(unfreyes Ding.)
II.
(unfreyes sinnliches Ding.)
a.
(Form desselben in abstracto.)
α Zeitlehre (Zeit.)
β Raumlehre. (Raum.)
b.
(sinnliches Ding in concreto.)
α Chronische Aetiologie. (sinnliches Ding in der Zeit.)
β Reine Naturwissenschaft. (sinnliches Ding in Zeit und Raum.)
Ueber

Abb. 1: Beyträge [2], S.37

Die Beyträge zeigen schon die Charakteristika Bolzanoscher Darstellungen: ehrlich in Bezug auf eigene mögliche Fehler und Unzulänglichkeiten, interessiert an und offen für Diskussionen, um seine Leser bemüht, fair im Urteil über Kollegen.
Einige nicht-mathematische Veröffentlichungen seien aufgelistet:

- 1810 Mit Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik [2], versucht Bolzano – wie oben dargestellt – eine (philosophische) Grundlegung der Mathematik.

- 1834 Das vierbändige Lehrbuch der Religionswissenschaft erscheint anonym. Bolzano stellt die wichtigsten Lehren der natürlichen Religion bzw. Vernunft-Religion dar, untersucht die Wunder, die zur Bestätigung des katholischen Christentums dienen und behandelt die einzelnen Glaubensartikel der 'Christkatholischen Dogmatik' sowie der 'Christkatholischen Moral' [9].

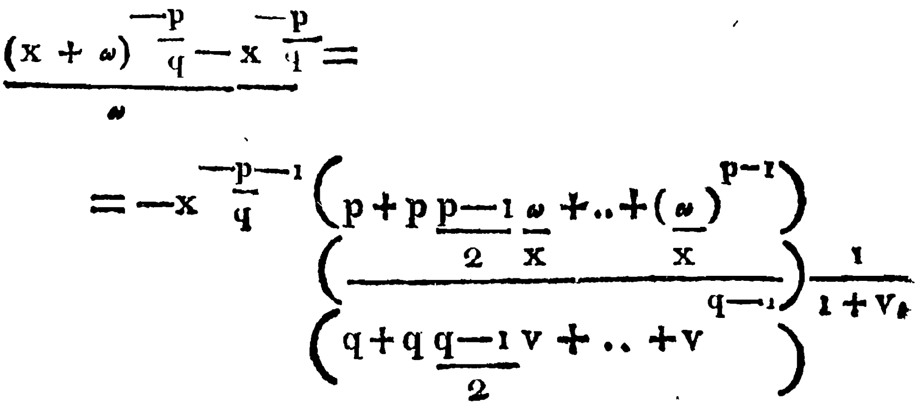
- 1837 Wissenschaftslehre -Versuch einer ausführlichen und Grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.
  Band 1 ist der Struktur und Methodik wissenschaftlicher Erkenntnis gewidmet. Notwendig sind eine klare und präzise Sprache sowie die Beachtung der (mathematischen) Logik.
  Band 2 untersucht Abstraktion und ihre Rolle bei der Strukturierung von Wissen, Klassifikation von Wissen sowie die Rolle der Sprache für die Übermittlung von Wissen.
  Band 3 konzentriert sich auf die Erkenntnislehre (Wahrnehmung, Vernunft und Erfahrung) und die Erfindungskunst (Vorstellungskraft, Intuition und Kreativität), wodurch Bolzano eine umfassende Untersuchung der Prozesse der Wissensgenerierung und -vermittlung vorlegt.
  Band 4 untersucht die grundlegenden Prinzipien der wissenschaftlichen Methode, die Rolle von Logik und Erfahrung bei der Gewinnung von Erkenntnissen und die Bedeutung sprachlicher Klarheit und Kohärenz in der Formulierung von Theorien und Hypothesen.

In meinen Augen zeigen seine Bücher Demut und Größenwahn zugleich: Demut in Bezug auf eigene Ergebnisse (und Fehler) im Vergleich etwa zu Kant, und Größenwahn in Bezug auf seine Ziele, wie beispielsweise Philosophie und Mathematik zu vereinen.

Mathematisches

Vorweg sei angemerkt, dass die Setzer von Bolzanos Werken wohl keine Mathematiker gewesen sein können: Brüche, Exponenten, Indizes in den Texten sind häufig unglücklich gesetzt, vgl. z.B. Abb. 2, und es gibt so manche Druckfehler, vor allem in [4] – Corrigenda gibt's beim Verfasser.

Die Faksimile-Ausgaben sind auch wegen ungebräuchlicher Schreibweisen nicht gut zu lesen, z.B. sind Indizes direkt über dem Symbol angeordnet $\overset{i}{a} = a_i$ und entsprechend ungewöhnlich $\overset{(a)}{l}\, x = \log_a x$. Bolzano verwendet



$$\frac{(x+\omega)^{-\frac{p}{q}} - x^{-\frac{p}{q}}}{\omega} = -x^{-\frac{p}{q}-1} \frac{\left(p + p\frac{p-1}{2}\frac{\omega}{x} + \ldots + \left(\frac{\omega}{x}\right)^{p-1}\right)}{\left(q + q\frac{q-1}{2}v + \ldots + v^{q-1}\right)} \frac{1}{1+v}$$

Abb. 2: [4] S.23 – Faktoren, Brüche, Exponenten, Klammern im Druck

auch Bezeichnungen nicht immer einheitlich: in [4] und [7] ist z.B. *ab* einmal die Strecke/Kurve von a nach b und ein andermal ihre Länge. Achtung: Bolzanos Geraden heißen auch Linien und meinen häufig heutige Strecken [7], und *beliebig kleine Größen* sind meist *betragsmäßig beliebig klein* [4].

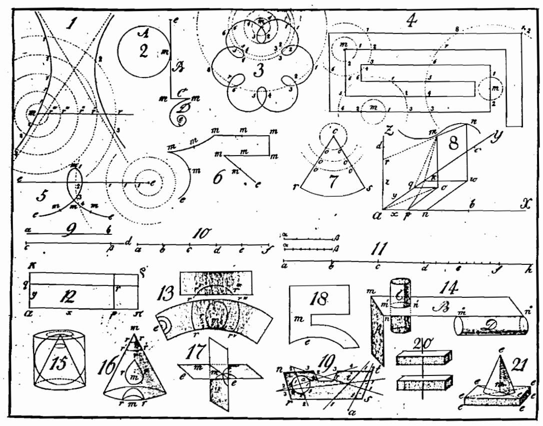
Bolzano fordert von der Anschauung unabhängige, d.h. strenge Beweise, s.a. Vorrede zu [5]. „Motto: Auch das vorgeblich Offensichtliche beweisen!“ Er hat in diesem Sinn wesentlich zur Entwicklung vor allem der Analysis beigetragen.

Einen Zugang zu seinem Denken stellen sicher seine mathematischen Tagebücher Miscellanea mathematica [9] dar, die auf über zweitausend eng beschriebenen Folioseiten einen lückenlosen Bericht über seine wissenschaftliche Entwicklung von 1799 bis 1844 abgeben. Dauben [22] charakterisiert die vielen behandelten Themen so:

> Bolzano opens this notebook of Miscellanea mathematica with notes on irrational and transcendental numbers and functions. But he was reading and recording his ideas on a host of other subjects as well, including the problem of how best to approach the proper mathematical understanding of zero; Legendre's work on surfaces, convexity, concavity, and conditions for congruity; analysis of other geometric concepts, including lengths, areas, volumes, and spheres; trigonometric formulas and spherical trigonometry; imaginary and exponential numbers; definition of the differential and discussion of the infinite and various opinions about it,

> as well as aspects of maxima and minima ... Other topics covered here include various approaches to the calculus (including the method of exhaustion), and grounds for asserting the certainty of mathematics.

Mit wie verschiedenartigen mathematischen Problemen sich Bolzano auseinandergesetzt hat, soll beispielhaft eine Zusammenstellung einiger Abbildungen [12] zeigen, wo etwa in No 3 die Epitrochoide und in No 5 die Zykloide (auch in [7]) zu erkennen sind, und wo ich mich unmittelbar frage, wie Bolzano wohl solche 2D- und 3D-Graphiken erstellt hat.



Im Folgenden möchte ich chronologisch und exemplarisch auf einige mathematische Resultate Bolzanos und ihre Genese eingehen.

- 1802-1804 Schon in dieser Zeit der Vorbereitung seiner Promotion beschäftigt Bolzano z.B. das Parallelenaxiom (vgl. [5] S.27) oder die Definition des Continuums der reellen Zahlen (vgl. [5] S.22) – Themen, die ihn lebenslang beschäftigen werden.

- 1804 In Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie [1] beklagt Bolzano den Umstand, dass grundlegende geometrische Objekte wie die Gerade nicht definiert sind und dass allenthalben etwa sachfremde 'Bewegungen' bemüht werden. Er lagert die Definition von Geraden in den zweiten Teil aus, wo er das Problem der Definition von Strecken und Geraden auf das Problem der Defintion von *entgegengesetzten Richtungen* verschiebt und gesteht in §24, letzteres nicht gelöst zu haben. Er bleibt so manches schuldig: es ist m.E. nicht einzusehen, wieso in §6 Winkel *keine Größen* sein sollen. Das ist für mich nicht nachvollziehbar, vor allem, weil Bolzano die Fläche, die ein Schenkelpaar etwa im Einheitskreis berandet, etwas großspurig verwirft. Wie dumm, wo dieses Maß doch gerade der Hälfte des modernen Bogenmaßes entspricht, das er selbst in den posthum veröffentlichen *Paradoxien des Unendlichen* [7] verwendet.Wenn abschließend Winkel keine *Größen* sind, bleiben als einzige Prädikate nur Gleichheit und Ungleichheit.
  In §6 führt Bolzano Entfernung zweier Punkte als abstrakte Größe ein – ohne eine Methode anzugeben, Entfernungen zu messen

und zu vergleichen. So bleiben Hypothesen wie beispielsweise in §11 für Entfernungen $d(A, B) = d(B, A)$ und in §14 für Winkel $\angle(sar) = \angle(ras)$ auch ohne Beweis.
In der Retrospektive erscheinen meine Einwände als Besserwisserei. Aber ich frage mich, was Bolzano alles hätte leisten und beweisen können, wenn er sich etwa auf Geometrie mit Zirkel und Lineal gestürzt und beschränkt hätte.

- 1816 In **Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen: genauer als bisher erwiesen**, [4] stellt Bolzano in der Einleitung ausführlich die zeitgenössischen Mängel der Approximation von Funktionen wie z.B. $f(x) = (1+x)^n$ durch letztendlich ihre Taylor-Polynome dar. Er beweist gemäß seiner Forderung nach strengen Beweisen den Binomial-Satz $(1 + x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$ für $n \in \mathbb{N}$ in §8 per Induktion in n und verallgemeinert in §10 zu $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$. Er zeigt in §12 in einem ersten Schritt, dass die Funktion $\frac{1}{1+x}$ für $|x| < 1$ durch die Polynome $\sum_{r=0}^{m} (-1)^r x^r$ approximiert wird.
  In §§14-22 beschreibt Bolzano, wie man mit (betragsmäßig) beliebig kleinen Größen $\omega, \Omega, \ldots$ rechnet [21] und stellt folgende Hilfsmittel bereit: in §23 zeigt er $\frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega} = nx^{n-1} + \Omega$, in moderner Schreibweise also $\lim_{\omega \to 0} \frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega} = nx^{n-1}$ oder eben $(x^n)' = nx^{n-1}$, und in §28 den Identitätssatz für Polynome sowie in §33 für festes n $(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}x^2 + \ldots + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-r+1}{r}x^r + \Omega$ für jedes $|x| < 1$.
  Um die Taylor-Polynome der drei Funktionen $y = (1 + x)^n$, $y = a^x$ und $y = \log_a x$ herzuleiten, macht Bolzano jeweils den Ansatz $y = f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Rx^\varrho + \Omega$, wobei Ω beliebig klein werden kann, wenn nur der Grad des Polynoms genügend groß gewählt wird. Er berechnet zum einen einen Ausdruck für $f'(x) \approx \frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$ für beliebig kleines ω und führt zum anderen laut Identitätssatz einen Koeffizientenvergleich mit $A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + \ldots + R\varrho x^{\varrho-1}$ durch. So gewinnt er in §46 für $n \in \mathbb{R}$ und jedes $|x| < 1$ die Entwicklung[1]

  $$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}x^2 + \ldots + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-r+1}{r}x^r + \Omega,$$

  die er in §53 zur Multinomial-Reihe verallgemeinert und in §59 zur Reihe für $\big(p(x)\big)^n$ mit Polynomen p spezialisiert.

[1] Isaac Newton (1643-1727) entdeckte diese Entwicklung schon in 1669, ohne sie jedoch zu beweisen, https://de.wikipedia.org/wiki/Binomische_Reihe

In §64 entwickelt er die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$

$$f(x) = a^x = 1 + \mathcal{A}x + \tfrac{1}{2}\mathcal{A}^2x^2 + \ldots + \tfrac{1}{r!}\mathcal{A}^r x^r + \Omega$$

mit $f'(0) = \mathcal{A} \approx \frac{a^\omega - 1}{\omega}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. In §72 leitet er dann speziell $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{r!}x^r + \Omega$ mit der Euler[2]schen Zahl $e = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{r!} + \Omega_e$ her.

Schließlich gelingt ihm in §66 die Entwicklung des Logarithmus' zur Basis $a > 0$, d.h. für $0 < y = a^x \leq 2$

$$x = \log_a y = \tfrac{1}{\mathcal{A}}\big((y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots \pm \tfrac{1}{r}(y-1)^r\big) + \Omega$$

und in §72 diejenige des natürlichen Logarithmus', d.h. für $y \in (0,2]$ $\log_e y = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots \pm \frac{1}{r}(y-1)^r + \Omega$.

In diesem Zusammenhang vergleicht Bolzano zudem die Konvergenzgeschwindigkeiten verschiedener Entwicklungen von $\log_a y$ wie $\log_e u = \frac{u-1}{u} + \frac{1}{2}\big(\frac{u-1}{u}\big)^2 + \ldots + \frac{1}{r}\big(\frac{u-1}{u}\big)^r + \Omega$ für $u > \frac{1}{2}$ oder $\log_e v = \frac{2}{1}\frac{v-1}{v+1} + \frac{2}{3}\big(\frac{v-1}{v+1}\big)^3 + \ldots + \frac{2}{2r+1}\big(\frac{v-1}{v+1}\big)^{2r+1} + \Omega$ für $v > 0$ und weist in §74 $\log_b y = (\log_b a)\log_a y$ nach, so dass er Logarithmen zu beliebigen Basen auf natürliche Logarithmen zurückführen kann.

Im abschließenden Paragraphen §75 bremst Bolzano angesichts ungeklärter Ausdrücke wie etwa $(-2)^{\sqrt{3}}$ und hält sich vornehm zurück: erst wenn Der binomische Lehrsatz und ... [4] *beyfällig aufgenommen* worden sei, wolle er seine *Meinung* zu solchen Ausdrücken *eröffnen.*

- 1817 hat Bolzano (lange vor Weierstraß) per Intervallschachtelung bewiesen, dass jede unendliche, beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge enthält[3].
  Some fifty years later the result was identified as significant in its own right, and proved again by Weierstrass (1815-1897). It has since become an essential theorem of analysis [17], wie ja auch die Verallgemeinerungen für Folgen im $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ und allgemein in reflexiven Räumen zeigen.

- 1817 In Rein analytischer Beweis des 'Zwischenwertsatzes' [5] liefert Bolzano neben dem titelgebenden Satz Grundsätzliches zu Stetigkeit, zu Potenzreihen wie auch zur Beweisführung.

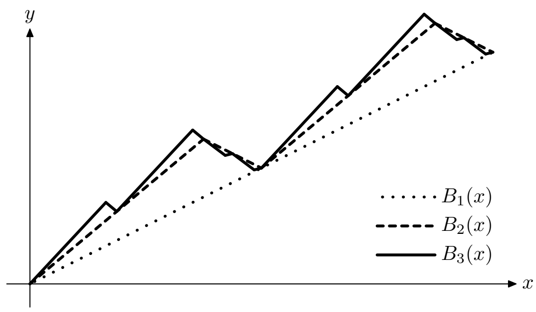
---

[2]Leonhard Euler (1707-1783), auf den sich Bolzano hier nicht explizit bezieht!
[3]s.a. https://en.wikipedia.org/wiki/Bolzano-Weierstrass_theorem

In Teil I der langen Vorrede (S.6-28 inkl. Auseinandersetzung mit Veröffentlichungen von Gauß, Laplace und Lagrange) begründet Bolzano erneut seine Forderung nach strengen Beweisen, die nicht auf beispielsweise geometrischer Anschauung beruhen dürfen. In Teil II läßt er *Zeit* und *Bewegung* für Erläuterungen zu, wendet sich aber entschieden gegen die Verwendung dieser Konzepte in strengen Beweisen.
Meine Aversion gegen Bolzanos Beispielfunktionen $f(x) = x + \sqrt{(1-x)(2-x)}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus (1,2)$ und $g(x) = x + \sqrt{(x-2)(x+1)}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,2)$ wie auch $h(x) = \frac{a}{b-x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{b\}$ rührt daher, dass Bolzano sich – nach meinem Gefühl – nicht traut, die reellwertigen Funktionen f, g und h als *nicht überall definiert* anzusehen und ihre Definitionsbereiche geeignet einzuschränken. Über zweihundert Jahre später kann ich seine Hemmung nicht so recht nachvollziehen. Überzeugend ist dagegen, wie – richtig gelesen – konzis Bolzano in seinem ω-Kalkül [21] „f ist stetig in $x \iff f(x+\omega) = f(x) + \Omega$“ definiert.
Auf S.22ff geht Bolzano von der Vollständigkeit der reellen Zahlen aus (was ich ihm gut nachempfinden kann), bevor er die lange Vorrede auf S.23-28 mit grundsätzlicher Selbstkritik beschließt: seinen eigenen Forderungen aus den Beyträgen zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik [2] könne man eigentlich nur entsprechen, indem man grundlegend ganz vorn anfängt. Bolzano rechtfertigt aber seine Veröffentlichungspraxis u.a. damit, dass so Austausch und Kritik befördert und (seine) Fehler schneller publik werden könnten.
Im Hauptteil stellt Bolzano beispielsweise in §5 fest, dass Potenzreihen konvergieren, wenn die geometrische Reihe eine konvergente Majorante ist. Er präzisiert in §7 die Konvergenz von Potenzreihen und benützt in §10 die Divergenz der harmonischen Reihe, um zu zeigen, dass es für die Konvergenz einer Reihe nicht reicht, wenn die Reihen-Elemente eine Nullfolge bilden.
In §12 berührt Bolzano die Supremumseigenschaft der reellen Zahlen, wo er die Existenz des Supremums einfach unterstellt: leider hat er etwa das Beispiel $M = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ mit $\sup M = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wohl nicht gekannt.
In §15 zeigt er mit obiger Einschränkung, dass $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ und $f(\beta) > \varphi(\beta)$ für stetige Funktionen f und φ die Existenz von $x \in (\alpha, \beta)$ mit $f(x) = \varphi(x)$ impliziert. Der Beweis auf S.51-55 macht umständliche Fallunterscheidungen I. bis IV. nach den Vorzeichen von α und β für den Rückgriff auf §12 nötig.

In §17 beweist er, dass Polynome stetig sind, und wendet in §18 den Zwischenwertsatz auf Polynome an, übrigens wieder mit der dem Beweisverfahren geschuldeten Fallunterscheidung nach Vorzeichen von α und β.

- Ca. 1830, unveröffentlicht, konstruiert Bolzano eine überall stetige, nirgendwo differenzierbare Funktion und widerlegt damit die zeitgenössische herrschende Meinung, dass es so etwas nicht geben könne. Die Konstruktion [14] nimmt übrigens die Idee fraktaler Kurven vorweg. Erst 1872 gibt Weierstraß mit $W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$ ein weiteres Beispiel einer überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion, s.a. [16] S.271.



- ca 1840 In Einleitung zur Größenlehre und erſte Begriffe der allgemeinen Größenlehre versucht Bolzano, 'Mengen' zu definieren [6] S. 152 und [20]. *„Bolzanos Definition ist allerdings nicht sonderlich befriedigend, da er zur Definition des Begriffs 'Menge' den Begriff 'Inbegriff' verwendet, der lange Zeit als Synonym für 'Menge' verwendet wird.*[23]

> Inbegriffe nun, bey welchen auf die Art, wie ihre Theile mit einander verbunden ſind, gar nicht geachtet werden ſoll, an denen ſomit Alleſ, waſ wir an ihnen unterſcheiden, beſtimmt iſt, ſobald nur ihre Theile [ſelbſt] beſtimmt ſind, verdienen eſ eben um dieſer Beſchaffenheit willen, mit einem eigenen Nahmen bezeichnet zu werden. In Ermangelung eineſ andern tauglichen Worteſ erlaube ich mir, daſ Wort Menge zu dieſem Zwecke zu brauchen.

  Bolzano darf also zumindest als Vorläufer von Dedekind und vor allem von Cantor gesehen werden, wie folgende, gut verständliche Cantor'sche Textstelle [10] belegt.

> **Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten *m* unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von *M* genannt werden) zu einem Ganzen.**

- 1851 erscheint posthum das Buch Paradoxien deſ Unendlichen [7], eine Sammlung, die eine Vielzahl von Themen angeht: §§11-17 (unendliche) Mengen, §11 Gott ist unendlich, §17 Raum und Zeit sind unendlich, §20 Existenz unendlicher Mengen mit derselben Kardinalität wie einige ihrer echten Teilmengen, §28, §32 Arithmetik mit ∞ mit abwegigen Resultaten, §37 Taylor-Polynom plus Restglied, §40-§49 geometrische Objekte mit Ausdehnung und irriger Kardinalität.

Im mathematisch Einzelnen: in §13 zeigt Bolzano, dass die Menge M der wahren Sätze unendlich viele Elemente enthält: mit Satz $A \in M$ ist nämlich auch $B =$ 'A ist wahr' $\in M$ und $C =$ 'B ist wahr' $\in M$ usw. Die Parallelen zu etwa der Peano'schen Konstruktion der natürlichen Zahlen sind offenbar.
In §14 stellt er sich gegen die Behauptung, Unendliches würde garnicht existieren. Im übrigen zeigt er sich als überzeugter Platoniker.
In §20 stellt er endlich fest: es gibt Mengen M und echte Teilmengen $T \subset N$ mit $\text{card}(M) = \text{card}(T)$, d.h. mit einer Bijektion zwischen M und T, z.B. $\text{card}([0,5]) = \text{card}([0,12])$ und natürlich $\text{card}\big((0,1)\big) = \text{card}(\mathbb{R})$.
In §21 läßt er verschiedene Unendlichkeiten zu, bleibt aber Belege schuldig. In §27 gehört Gottes Einwirken auf die physikalische Welt ganz natürlich zu den Einflüssen, die den Zustand z.B. der Erde ändern, s.a. Abschnitt 3. auf S.39, in dem Bolzano physikalische Ursachen und physikalische Wirkungen behandelt.
In §28 wird mit Unendlich gerechnet. Das führt in §29 zu völlig abwegigen Ergebnissen.
In §30 leitet Bolzano aus $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ nur $\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c) + (6x^2 + 3ax + b)dx + (4x + a)dx^2 + dx^3$ her, ohne den Schluß zu ziehen, dass dx, dx^2 und dx^3 unterschiedlich 'klein' sind, im Widerspruch zu §35.
In §32 geht er auf Widersprüche und Fehler ein, die den Kollegen beim Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Größen unterlaufen sind. Wie in [5] traut Bolzano m.E. sich nicht, die Reihe $a - a + a - a + a - a \pm a \dots$ mit möglichen Varianten $(a-a) + (a-a) + (a-a) \pm a \dots$ und $a + (-a+a) + (-a+a) + (-a+a) + \dots$ usw. als *nicht definiert*, nämlich divergent anzusehen. Burkhardt nennt so etwas 'kritiklose Verwendung divergenter Reihen' [11].
In §34 behauptet er, dass die Null wie auch $\sqrt{-1}$ etwas anderes als andere Zahlen seien, auf S.57 nämlich **gegenstandslose Größenvorstellungen**, und listet eine Reihe von Widersprüchen auf, die entstehen, wenn man 0 als Divisor zuläßt.
In §36 (Widerlegung von Euler) müht sich Bolzano mit Funktionen der Form $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ mit $F(a) = 0 = \Phi(a)$ ab. Bolzano schließt aus $F(a) = 0$, dass F von der Form $F(x) = (x-a)^n f(x)$ sein müsse, was erstens nicht generell zutrifft, wie das Beispiel $F(x) = |x|$

zeigt, und was er zweitens für *glatte* Funktionen eigentlich nicht wissen kann, da ihm die Taylor-Entwicklung (Taylor gibt rudimentäre Taylor-Entwicklung in 1715 an, Maclaurin gibt die Maxlaurin'sche Reihe in der heutigen Form in 1742 an, s. [16]) sowie das Differential-Kalkül von Lagrange von 1772 fehlen. Sonst hätte er nämlich seine Ideengeber m.E. ganz sicher benannt und gewürdigt.
In §37 zeigt sich Bolzano als Schüler von Cauchy und Lagrange. Er untersucht den Grenzwert des Differenzenquotienten, Ableitung sowie höhere Ableitungen, approximiert differenzierbare Funktionen durch ihr Taylor-Polynom plus Restglied (der Beweis liege ihm längst vor, er werde ihn später veröffentlichen!) und bestimmt Kurvenlängen durch 'Rektifizierung' als $ds^2 = dx^2 + dy^2$.
In §38 arbeitet er sich am Kontinuum von Raum und Zeit ab, und in §39 geht es ihm um Fragen wie: Ist die Zeit begrenzt? Was hat Zeit mit Gott und Ewigkeit zu tun? Existiert Zeit überhaupt?
In §40 problematisiert er Begriffe der Geometrie: Was sind Ausdehnungen im Raum? Was sind Flächen? Was sind Körper? Was sind Längen, Flächeninhalte und Rauminhalte?
In §43 mißt er Winkel im Bogenmaß – m.E. ein echter Fortschritt gegenüber [1] von 1804.
In §44 lehnt er Schulz und seinen kugelförmigen Raum $\mathbb{R}^3$ mit Radius ∞ und Volumen $\frac{4}{3}\pi\infty^3$ ab, allerdings bisweilen mit in meinen Augen recht fragwürdigen Argumenten.
In §49 bestimmt Bolzano die Menge der Punkte in geometrischen Objekten. Wenn er damit Objekte höchstwahrscheinlich im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ meint, gehen seine Berechnungen ziemlich in die Irre, insofern als er mit beispielsweise der Definition $E = \mathrm{card}([0,1])$ rechnet und so kaschiert, dass E unendlich groß ist, was absolut Unsinniges wie $\mathrm{card}([0,2]) = 2E - \mathrm{card}(\{1\}) = 2E - 1$ zur Folge hat.

Die Sammlung behandelt in §§50-70 aber auch Themen der Physik. Stichwortartig seien aufgelistet: §27 Gottes Einwirken auf die physikalische Welt ändert physikalische Zustände, §38 Zeit- und Raum-Kontinuum, §39 Zeit = Gott? §§40-44 Raum, §§50-61 Materie, Geist, Kräfte, Schöpfung, Dichte, herrschende Substanzen, §§63-69 Anziehung/Abstoßung, Äther, Wärmestoff, Ätheratome, §69 Bewegungen im Weltall und des Weltalls (Gott führt jedes dem Wohl seiner Geschöpfe zuträgliche (physikalische) Ereignis herbei!), §70 Euler'sche Paradoxien (Atom-Bewegung, Pendel).

Schluß

Mich erstaunt, wie emotional ich auf Bolzanos Veröffentlichungen reagiere:

- mit großer Sympathie aufgrund seiner Aufrichtigkeit, Offenheit, Fairness z.B. gegenüber Kollegen und seiner Bemühungen um seine Leser, und mit großer Hochachtung für seine Weiterentwicklungen der Analysis wie z.B. Potenzreihen-Entwicklung für Exponentialfunktion und Logarithmus [4], Zwischenwertsatz [5] oder Definition von (unendlichen) Mengen und von Ableitung und höheren Ableitungen [7]. Viele seiner Entdeckungen waren seiner Zeit voraus, wie etwa die Konstruktion einer überall stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktion [14] oder seine Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß oder Definition von und Umgang mit (unendlichen) Mengen [7].

- mit innerem Widerstand gegenüber bestimmten seiner Ziele, z.B. Philosophie und Mathematik zu vereinen, ohne dabei in Widerspruch zu Geistesgrößen wie Kant zu geraten,

- mit Besserwisserei, wenn Bolzano sich mit Begriffsbestimmungen abmüht [2], vor allem in der Geometrie [1] [7] oder wenn er sich scheinbar nicht traut, bestimmte Ausdrücke als undefiniert zu klassifizieren [7],

- und mit Opposition, wenn unbedingt auch Sätze über Gott (ist Gott unendlich? [7]) zulässig und entscheidbar sein sollen.

Mir imponiert seine Beharrlichkeit, strenge Beweise einzufordern.

Meine Reaktionen sind also extrem zwiespältig und eben so divers wie seine theologischen, philosophischen und mathematischen Beiträge bis hin zu seiner Utopie eines antinationalistischen und gemeinwohlorientierten Staates [8].

Für mich wurde der Abstand zu Bolzano, d.h. der seit seiner Zeit gemachte Fortschritt, besonders in der Behandlung des Kontinuums von Raum und Zeit deutlich: wir sind heutzutage so vertraut mit den reellen Zahlen, dass wir nichts besonderes oder gar paradoxes an $\operatorname{card}\big((0,1)\big) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$, $\operatorname{card}(\mathbb{C}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$ u.drgl. finden. Und die Relativitätstheorie hat Raum und Zeit, für Bolzano getrennte *Bestimmungen* und für Kant getrennte *Formen unserer Anschauungen*, in das Raumzeit-Kontinuum überführt. Ähnlich überheblich sind meine Reaktionen auf seine Ausführungen zur Physik von Äther, Wärmestoff u.ä. [7].

Mich gemahnt Bolzano daran, dass wissenschaftliche Forschung nie geschichtslos entsteht, sondern immer vor dem Hintergrund des frei verfügbaren Wissens zu sehen ist.
Für mich steht Bolzano auf den Schultern von Giganten, während zugleich Politik und Zeitgeist in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts Höhenflüge eher verhindert und die politische Reaktion ihn fesselt, wenn nicht gar zu Fall bringt. Aber wer bin ich, so etwas zu entscheiden …

Literaturverzeichnis

[1] **Bolzano, B.**: *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*; Karl Barth, Prag 1804, X+63 Seiten https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400338

[2] **Bolzano, B.**: *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*; Caspar Widtmann, Prag 1810, The European Digital Mathematics Library, 16+152 Seiten https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400339

[3] **Bolzano, B.**: *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*; mit einer Einleitung von Hans Wußing, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1974, 29+152 Seiten

[4] **Bolzano, B.**: *Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen: genauer als bisher erwiesen*; 1816, 144 Seiten
https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400157/Bolzano_18-1816-1_3.pdf

[5] **Bolzano, B.**: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*; Gottlieb Haase, Prag 1817, 60 Seiten
https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400352

[6] **Bolzano, B.**: *Einleitung zur Größenlehre und erste Begriffe der allgemeinen Größenlehre*. Hrsg.: Jan Berg (= Eduard Winter u.a. [Hrsg.]: Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe. II, A). Band 7. Friedrich Frommann Verlag, Stuttgart/Bad Cannstatt 1975

[7] **Bolzano, B.; Príhonský, F.; Hahn, H.**: *Paradoxien des Unendlichen*; Der Philosophischen Bibliothek Band 99. Leipzig: Verlag von Felix Meiner, 1851, pp. 1-132. http://dml.cz/dmlcz/400241

[8] **Bolzano, B.**: *Von dem besten Staate*; mit einführenden Betrachtungen von Arnold Kowalewski pp. [V]–XXVIII., Prag 1932 http://dml.cz/dmlcz/400110

[9] **Bolzano, B.**: *Gesamtausgabe*; Begründet von Jan Berg, Friedrich Kambartel, Jaromír Louzil, Bob Van Rootselaar und Eduard Winter. Fortgeführt von Edgar Morscher. Herausgegeben von Otto Neumaier und Christian Tapp. frommann-holzboog 1969ff ca. 133 Bände, 114 Bände lieferbar, 19 Bände in Vorbereitung

[10] **Cantor, G.**: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*; Mathematische Annalen, (page(s) 481 - 512) Berlin, Göttingen, Heidelberg; 1869

[11] **Burkhardt, H.**: *Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750 bis 1860.* Math. Ann. **70** (1911), S. 169-206

[12] **Nový, L.; Folta, J.**: *Bolzano's Early Mathematical Achievements and Problems of His Historical Appreciation*; Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Special Issue 12, Pragae 1981
https://page.mi.fu-berlin.de/rote/Kram/Bolzano-Early-Mathematical-Works.pdf

[13] **Spalt, D.**: *Bolzanos Lehre von den meßbaren Zahlen 1830–1989*; Arch. Hist. Exact Sci., March 1991, **42**, 15-70 (1991)

[14] **Thim, J.**: *Continuous Nowhere Differentiable Functions*; MS-Thesis, Luleå University of Technology 2003
www.researchgate.net/publication/255669824_Continuous_Nowhere_Differentiable_Functions_MS_Thesis

[15] **Künne, W.**: *Versuche über Bolzano*; Academia, St. Augustin 2008

[16] **Wußing, H.**: *6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart*; Springer 2009

[17] **Bölling, R.**: *Karl Weierstraß - zum 200. Geburtstag* „Alles im Leben kommt doch leider zu spät“, https://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Institutskolloquium/Boelling/Boelling-Weierstrass.pdf

[18] **Schuster, P.M.**: *Bernard Bolzano und Christian Doppler*; 2017
https://www.christian-doppler.net/bernhard-bolzano

[19] **Russ, S.; Guillén, E.F.**: *web site*; Prague 2017 https://bernardbolzano.org

[20] **Centrone, S.; Siebel, M.**: *Collections in Early Bolzano*; Journal for the History of Analytical Philosophy, **6**, No 7 (2018) https://jhaponline.org/jhap/article/view/3214/3177

[21] **Guillén, E.F.; Adame, C.M.**: *The notion of variable quantities ω in Bolzano's early works*; 2020 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086019300436

[22] **O'Connor, J.J.; Robertson, E.F.**: *Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano* MacTutor-Biography https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano/

[23] **Kowarschick, W.**: *GlossarWiki*; Hochschule Augsburg
https://glossar.hs-augsburg.de/Menge_(Mengenlehre)

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Thomas Risse
Fakultät E-Technik und Informatik
Hochschule Bremen, City University of Applied Sciences
Flughafenallee 10, D-28199 Bremen
E-Mail: risse@hs-bremen.de

Dieter Schott

Begriff – Funktion – Gegenstand und die Logik von Gottlob Frege

Zusammenfassung: Gegenstände sind dem erkennenden Subjekt entgegentretende materielle oder ideelle Ganzheiten. Begriffe sind Abstraktionen, die gleiche Merkmale von verschiedenen Gegenständen erfassen. Funktionen bilden Gegenstände eines Bereiches eindeutig auf Gegenstände eines anderen Bereiches ab. Bei Gottlob Frege, dessen 100. Todesjahr wir 2025 gedenken, werden diese Bestimmungen aus logischer Sicht in einen Zusammenhang gebracht, um letztendlich Zahlen zu definieren. Es wird erläutert, wie das bei ihm geschieht und was heute fortwirkt. Das Vorgehen im Beitrag ist systematisch und nicht chronologisch.

1. Einführung

Gottlob Frege ist ein bedeutender Denker, der als Mathematiker sich intensiv mit Logik und Philosophie beschäftigte, um die exakte Begründung der Mathematik zu verwirklichen. [10]
Im 19. Jahrhundert gewinnen Sprachanalyse und Sprachkritik in der Philosophie zunehmend an Bedeutung. Ein Vorreiter dieser Analytischen Philosophie ist Gottlob Frege. Er geht von der natürlichen Sprache Deutsch aus, analysiert deren logische Strukturen, erkennt deren Schwächen und erfindet eine „Formelsprache des reinen Denkens", mit der man von sofort einsichtigen wahren Grundsätzen (Axiomen) mit Hilfe scharfer logischer Schlussregeln zu weiteren unbezweifelbar wahren Sätzen gelangt. Er kommt zu der Überzeugung, dass die in natürlichen Sätzen vorkommenden Bestandteile *Subjekt – Prädikat* in der Logik durch *Argument – Funktion* zu ersetzen sind. Die Auffassung eines Satzinhalts als Funktion eines Arguments wirkt dabei insofern begriffsbildend, als Gegenständen im Argument durch die Funktion *Wahrheitswerte* (wahr, falsch) zugeordnet werden. Gegenstände mit dem Wert ‚wahr' fallen dann unter den von der Funktion erzeugten Begriff. [1], [2]

2. Zeichen – Gegenstand – Begriff

Gegenstände sind im Leben allgegenwärtig. Sie treten uns als Ganzes entgegen, im Haushalt, bei der körperlichen Arbeit oder beim Denken. In der Sprache

bezeichnen wir sie mit vereinbarten Namen oder weisen mit den Händen oder mit Beschreibungen auf sie hin. Dabei wird meist der bestimmte Artikel verwendet: Siehst du *den* (bzw. *diesen*) Vogel dort oben fliegen?
Auch Begriffe bekommen Namen. Begriffe erfassen bestimmte gemeinsame Merkmale von Gegenstandsklassen. Die Merkmalsbeschreibung stellt die intensionale Seite, die Klasse die extensionale Seite des Begriffes dar. Die Botanik definiert z. B. einen ‚Baum' als ausdauernde und verholzende Samenpflanze, welche eine dominierende Sprossachse aufweist, die durch sekundäres Dickenwachstum an Umfang zunimmt.
Begriffe werden zunächst oft exemplarisch eingeführt. Es werden Kindern zum Beispiel Bäume gezeigt. Später lernt man die Begriffsmerkmale genauer kennen. Die exakte Einordnung, welche Pflanzen Bäume sind, muss man den Experten überlassen. Prinzipiell gibt es die Klasse der ‚Bäume' und die Klasse der ‚Nicht-Bäume', die alle übrigen Gegenstände enthält. In Einzelfällen kann es schwierig sein zu entscheiden, ob ein Gegenstand unter einen Begriff fällt oder nicht (Begriffsunschärfe).

Frege unterscheidet Zeichenreihen (Worte, Namen) von den sie bezeichnenden Gegenständen oder Gegenstandsklassen. Das Wort ‚Sokrates' steht für einen einzigen Gegenstand, nämlich für den bekannten griechischen Philosophen der Antike selbst. Frege spricht hier von einem *Eigennamen*. Dagegen ist das Wort ‚Baum' zunächst vage. Es kann einen ganz bestimmten Baum bezeichnen, zum Beispiel die Linde an Freges Haus in Bad Kleinen. Es kann aber auch für die botanische Gruppe ‚Baum' stehen und damit einen Begriff meinen. Frege nannte ein solches Wort „ergänzungsbedürftig" oder „ungesättigt". Es erzeugt eine „Leerstelle", die man in der Sprache der Mathematik auch Variable nennen kann. ‚Baum' entspricht sprachlich dann der *Aussagefunktion* ‚x ist ein Baum'. Sobald man für den Buchstaben x einen speziellen Gegenstand einsetzt, genauer, sobald die Leerstelle „von einem Eigennamen ausgefüllt wird oder von einem Ausdrucke, der einen Eigennamen vertritt", so entsteht eine *Aussage*. [2]

Ist x zum Beispiel ‚die Linde an Freges Haus', eine Kennzeichnung des Gegenstandes anstelle eine Eigennamens, so erhält man eine Aussage, sogar eine wahre Aussage bezogen auf die damalige Zeit: Die Linde an Freges Haus ist ein Baum. Heute steht Freges Haus noch, gehört ihm aber nicht mehr, und die Linde ist gefällt und abtransportiert worden.

Es gibt durchaus Kennzeichnungen, denen kein Gegenstand entspricht. Ein Beispiel ist ein gleichseitiges rechtwinkliges Dreieck in der Euklidischen Geometrie, dass es offensichtlich nicht gibt.
Den Wahrheitsgehalt vieler Aussagen kann man nur im Textzusammenhang beurteilen, der zusätzliche Informationen liefert (Freges *Kontextprinzip*). Das Urteil ist oft zeit- und ortsabhängig. Dabei handelt es sich hier um die Wahrheit der zweiwertigen Logik mit den Werten ‚wahr' und ‚falsch' und nicht um eine mögliche andere Verwendung von Wahrheit. Sprachlich verschieden formulierte Aussagen können durchaus inhaltsgleich sein, das heißt, den gleichen Sachverhalt darstellen. Frege verwendet für ‚Sachverhalt' missverständlich ‚Gedanke'. Er postuliert neben der ‚wirklichen Welt' (objektiven Realität) und der ‚Sinnenwelt' (Einzelbewusstsein) eine ‚Gedankenwelt' (ideelle Realität), die ewig und unveränderlich existiert. Die Kunst besteht nun darin, diese „Gedanken" in beurteilbare Aussagen „zu fassen". [5]
Setzt man in ‚x ist ein Baum' für x die Person ‚Frege' ein, so entsteht eine falsche Aussage, falls man den botanischen Begriff ‚Baum' meint. Im übertragenen Sinne wäre darüber nachzudenken. Prinzipiell gibt es eine unüberschaubare Menge von Gegenständen, die eingesetzt werden können, materielle Gegenstände, aber vor allem auch ideelle oder abstrakte Gegenstände. Bei naiver Betrachtung scheint das nicht problematisch. Aber der Teufel kann sich im Heuhaufen der möglichen Gegenstände gut verstecken.
Die Sprache ist ein Labyrinth, in dem man sich leicht verirrt, zumal sie oft mehrere Wörter für den gleichen Gegenstand oder Begriff zur Verfügung hat oder auch für ein Wort mehrere Gegenstände oder Begriffe in Frage kommen. Hier wird wieder der Textzusammenhang benötigt, um Klarheit zu bekommen.

Im Hinblick auf eine zu formulierende Wissenschaftssprache bemerkt Frege: „Gewiß sollte in einem vollkommenen Ganzen von Zeichen jedem Ausdrucke ein bestimmter Sinn entsprechen, aber die Volkssprachen erfüllen diese Forderung vielfach nicht, und man muss zufrieden sein, wenn nur in demselben Zusammenhange dasselbe Wort immer denselben Sinn hat."
Frege unterscheidet bekanntlich *Sinn* und *Bedeutung*. [4] Der Sinn eines Ausdrucks im Satz ist die Charakterisierung von dessen Inhalt, während die Bedeutung den Anteil am Satzurteil beschreibt, der den Satz wahr oder falsch macht.

Frege verwendet die Beispielsätze:

- Der Morgenstern ist der Abendstern.
- Der Morgenstern ist die Venus.

Hier versteht sich ‚ist' als ‚ist gleich', während ‚ist' bei ‚ist schön' eine Eigenschaft zuschreibt.
Mit dem ‚Morgenstern', der morgens als letzter im Osten verschwindet, und dem ‚Abendstern', der abends als erster im Westen auftaucht, hat man zwei verschiedene Kennzeichnungen für den gleichen Gegenstand, die ‚Venus', für den Astronomen ein Eigenname eines wohlbestimmten Planeten. Gleichzeitig ergeben ‚Morgenstern' und ‚Abendstern' einen jeweils verschiedenen Sinn, während der bezeichnete Gegenstand ‚Venus' die Bedeutung darstellt. [4], [9]

3. Logik

Für Gottlob Frege gehören Begriffe zur Logik. Sie treten als Teil von Aussagen der Logik auf.
Die (zweiwertige) Logik beginnt mit der Aussagenlogik. Sie enthält beurteilbare Aussagen (entweder wahr oder falsch), die man mit Hilfe von Verbindern (Junktoren) verknüpfen kann. Frege stellt in seiner Begriffsschrift die Verneinung (nicht, Negation) und die Bedingtheit (wenn-so, Implikation) an die Spitze. Damit kann man auch die Konjunktion (und-Verknüpfung) sowie die Disjunktion (oder-Verknüpfung, Alternative) bilden. Aussagen bekommt man auch aus Aussagefunktionen A(x) bzw. ‚x ist A', wenn man das x konkret wählt oder wenn man es quantifiziert: ‚Für alle x gilt A(x)' oder ‚für (mindestens) ein x gilt A(x)' bzw. ‚für einige x gilt A(x)'. Während A(x) Prädikate bzw. Begriffe festlegt, ergeben sich durch Quantoren daraus Aussagen. So spricht man auch von Prädikatenlogik, Quantorenlogik oder auch Begriffslogik. Frege benutzt nur die Allgemeinheit (den Allquantor) und drückte die Existenz (den Existenzquantor) mit Hilfe der Verneinung und der Allgemeinheit aus.
Frege benutzt in seiner Logik eine zweidimensionale Notation mit linienartigen Verbindungen, die sich nicht durchgesetzt hat. Aber in moderner Schreibweise wird sie heute überall genutzt. [1]

Als Beispiel betrachten wir den Begriff ‚Primzahl' aus der Mathematik. Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Bedeutet P(x) die Aussagenfunktion ‚x ist eine Primzahl', so fallen unter den Begriff ‚Primzahl' als Gegenstände alle Primzahlen. Dann sind P(2), P(3) und P(5) wahr, während P(4) und P(6) falsch sind. P(Frege) ist dann ebenfalls

falsch, ist aber auch unsinnig, weil es sich bei Frege um eine Person und nicht um eine natürliche Zahl handelt. Die Aussage ‚Für alle x ist P(x)' bzw. ‚Alle x sind Primzahlen' ist auf jeden Fall falsch. Die Aussage ‚Für einige x ist P(x)' bzw. ‚Einige x sind Primzahlen' ist dagegen wahr. Offen ist der Grundbereich, aus dem x gewählt wird. In der Mathematik schränkt man ihn auf natürliche Zahlen ein. Bei Frege umfasst der Grundbereich alle Gegenstände. In seiner Lesart ist ein weiterer Begriff, nämlich ‚natürliche Zahl', festzulegen. Wir nennen ihn N(x). Dann ist die neue Aussagenfunktion die und-Verknüpfung ‚$N(x) \wedge P(x)$', in der dann x speziell belegt oder quantifiziert wird.
In der Mathematik werden Zahlen als Gegenstände betrachtet. Wie bringt Frege das nun in seiner Logik zustande? Er braucht, wie sich herausstellt, Gegenstandsäquivalente zu Begriffen. Zunächst deklariert er sie als Umfänge, ohne darauf weiter einzugehen. Später spricht er von Klassen, die Wertverläufe der entsprechenden Aussagenfunktionen sein sollen. [1], [6]

4. Arithmetik der natürlichen Zahlen

Die Begriffsschrift entwickelt Frege vor allem deshalb, um sein Programm der Zurückführung der Mathematik auf die Logik (Logizismus) zu verwirklichen. [11]
Zunächst definiert er die (natürlichen) Zahlen als logische Gegenstände. Da er streng zwischen Begriffen und Gegenständen unterscheidet [3], können Zahlen keine Begriffe sein. So erklärt er die Umfänge von Begriffen zu Gegenständen. Aber was sind Begriffsumfänge? Die Menge der Gegenstände, die unter einen Begriff fallen, kommt für ihn nicht in Frage, da Mengen zur Mathematik und nicht zur Logik gehören. Da Begriffe für ihn Aussagefunktionen mit Wahrheitswerten sind, greift er stattdessen zu deren *Wertverläufen*. Der Wertverlauf eines Begriffes ordnet jedem Gegenstand das Attribut ‚wahr' oder ‚falsch' zu, je nachdem, ob der Gegenstand unter den Begriff fällt oder nicht. Schließlich braucht Frege zu den Grundgesetzen (Axiomen) der Begriffsschrift noch ein weiteres Gesetz (bei ihm Grundgesetz V) [8]. Es besagt, dass zwei Begriffe genau dann gleich sind, wenn ihre Umfänge (Klassen) übereinstimmen. Damit kann man von Begriffen eindeutig zu deren Umfängen übergehen und umgekehrt. Damit hat man neben der Begriffslogik eine Klassenlogik.

Weiter geht es wie folgt [6]:

- Zwei Begriffe heißen *gleichzahlig*, falls sich die jeweils unter die Begriffe fallenden Gegenstände umkehrbar eindeutig einander zuordnen lassen. (Das entspricht bei Mengen dem *gleichmächtig*.)
- Die *Anzahl* eines Begriffes F ist der Umfang des Begriffes „gleichzahlig zu F“
- Die Zahl 0 ist die Anzahl des Begriffes ‚sich selbst ungleich‘, also der Umfang von „gleichzahlig zu ‚sich selbst ungleich‘ “. Unter diesen Begriff fällt kein Gegenstand.
- Die Zahl 1 ist die Anzahl des Begriffes „gleich 0“ bzw. der Umfang von „gleichzahlig zu ‚gleich 0‘ “. Unter den Begriff fällt genau ein Gegenstand, die Zahl 0.

Nun wird zur Zahl n noch der Nachfolger n‘ definiert. Dabei sollen unter n‘ alle Gegenstände fallen, die unter n fallen, und außerdem noch ein einziger weiterer Gegenstand. Dann kann man alle Zahlen bilden. Nach Einführung der Addition ergibt sich der Ausdruck $n' = n + 1$. Man kann dann die Grundgesetze der Arithmetik der natürlichen Zahlen nachweisen, die bei Frege in etwa den Axiomen von Giuseppe Peano entsprechen. Auf Basis der Grundgesetze sind alle übrigen Sätze der Arithmetik herleitbar.

Die Zahlen sind bei Frege Umfänge von Begriffen, die sich auf Begriffe von Gegenständen beziehen (Begriffe zweiter Ordnung).

5. Die Antinomie

Im Jahre 1902 macht Russell in einem Brief Frege auf einen Widerspruch in dessen System der ‚Grundgesetze‘ aufmerksam [8]. Ausgangspunkt ist die Unterscheidung von nicht-prädikativen und prädikativen Begriffen. Zur ersten Sorte gehören die Begriffe, die sich auf sich selbst beziehen. Ein Beispiel ist der Begriff ‚abstrakt‘, der selbst abstrakt ist. Wenn man einen solchen Begriff definieren will, ergibt sich ein problematischer Zirkel. Man geht von etwas aus, was man erst festlegen will.
Die zweite Sorte bilden Begriffe, die nicht auf sich selbst bezogen sind. Ein Beispiel ist der Begriff ‚Mensch‘, der selbst kein Mensch ist.
Bildet man nun den Begriff R von den ‚prädikativen Begriffen‘ so ist die Frage, ob R prädikativ oder nicht-prädikativ ist. Obwohl dieser Begriff R eine sehr theoretische Konstruktion ist, ist er doch in Betracht zu ziehen. Egal, was man von R annimmt, es folgt dann das Gegenteil. So ergibt sich leider ein logischer

Widerspruch. Russell möchte daher nicht-prädikative Begriffsbildungen verbieten, um mögliche Widersprüche auszuschließen. Aber auch das erweist sich als problematisch, weil unverzichtbare Begriffsbildungen in der Mathematik nicht-prädikativ sind.
Da Russell von Mengen oder Klassen der Mathematik ausgeht, entschließt sich Frege, bei den Wertverläufen von Begriffen auch von Klassen zu sprechen, die dann bei ihm logische Gegenstände sind. Die Zahl 0 ist dann die Klasse aller Klassen leerer Begriffe, die Zahl 1 ist die Klasse aller Klassen einzahliger Begriffe und so weiter.

Was bedeutet Russells Antinomie in der Klassensprache. Was ist mit einem Begriff, dessen Klasse unter ihn fällt? Dieser Begriff ist nicht-prädikativ. Um sich vom Begriff zu lösen, sagt man auch, dass die Klasse sich selbst angehört. Was ist nun mit der Klasse K aller Klassen, die sich nicht selbst angehören. Sie gehört sich einerseits selbst an und andererseits nicht. Ein logischer Widerspruch. Diese Klasse existiert also nicht, obwohl es sie nach Freges Theorie geben müsste. Wo steckt der Fehler? Frege schien einerseits Grundgesetz V (Begriffsgleichheit gleich Klassengleichheit) intuitiv klar, obwohl er zugleich ein dummes Gefühl hatte. Dieses Grundgesetz erwies sich später als Übeltäter. Aber auch ein Verzicht auf V oder eine Abschwächung von V bringen nichts. In der Mengentheorie hilft man sich mit einem Axiomensystem, dass die der Klasse K entsprechende Menge ausschließt. Aber diese Axiome sind nicht alle logischer Natur. So ist der Logizismus gescheitert, selbst die Arithmetik ist nicht rein logischer Natur.

6. Resümee und Ausblick

Frege entwickelt die zweiwertige Prädikatenlogik, die Begriffsschrift, in der Begriffe über logische Funktionen erfasst werden. An den Anfang stellt er Axiome, aus denen die Wahrheit oder Falschheit von Aussagen mittels logischer Schlüsse hergeleitet wird. Diese Logik wird heute in moderner Schreibweise überall eingesetzt, vor allem in der Mathematik und in der Informatik. Die Erweiterung dieser Logik auf eine Klassenlogik erlaubt es, natürliche Zahlen als Gegenstände zu definieren. Allerdings stellt sich heraus, dass die Klassenlogik widersprüchlich ist. Daraus folgt

- Die Zahlen sind keine (rein) logischen Gegenstände.
- Die Arithmetik ist nicht (rein) logischer Natur.

Später beweist der österreichische Logiker Kurt Gödel, dass schon die Arithmetik Sätze enthält, die axiomatisch nicht entscheidbar sind. Damit ist neben dem Logizismus auch das Programm von David Hilbert gescheitert, die gesamte Mathematik axiomatisch zu begründen.

Es scheint so, dass Programme zur strengen Begründung der Mathematik stets neue Einsichten bringen, zugleich aber Grenzen aufzeigen, die neue Fragen aufwerfen.

Literaturverzeichnis

1. Frege, G.: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Verlag Louis Nebert, Halle a. d. Saale 1879. Nachdruck z.B. in: Gottlob Frege. Begriffsschrift und andere Aufsätze. Herausgegeben von I. Angelelli, Georg Olms Verlag Hildesheim u.a. 1964.
2. Frege, G.: Funktion und Begriff. Vortrag 1891. Nachdruck z.B. in: Gottlob Frege. Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Herausgegeben von G. Patzig, Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1962.
3. Frege, G.: Über Begriff und Gegenstand. Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie 16 (1892), S. 192-205. Nachdruck z.B. in: Gottlob Frege. Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Herausgegeben von G. Patzig, Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1962.
4. Frege, G.: Über Sinn und Bedeutung. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik C (1892), S. 25-50. Nachdruck z.B. in: Gottlob Frege. Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Herausgegeben von G. Patzig, Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1962.
5. Frege, G.: Der Gedanke – eine logische Untersuchung. Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, 1. Jg., Heft 2, S. 58-77 (1918-1919). Nachdruck z. B. in: Logische Untersuchungen. Herausgegeben von G. Patzig, Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1966.
6. Frege, G.: Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Verlag Wilhelm Koebner, Breslau 1884.
7. Frege, G.: Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet, I. Band. Verlag Hermann Pohle, Jena 1893.
8. Frege, G.: Grundgesetze der Arithmetik, II. Band. Verlag Hermann Pohle, Jena 1903.
9. Kienzle, B., Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege. Wismarer Frege Reihe, Heft 02/2006, S. 6-40.
10. Schott, D. (Hrsg.): Gottlob Frege - ein Genius mit Wismarer Wurzeln. Leistung – Wirkung – Tradition. Leipziger Universitätsverlag 2012.
11. Schott, D.: Freges Logik und der Logizismus. Wismarer Frege-Reihe, Heft 03/2023, S. 16-39.

Autor

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D-23966 Wismar
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Peter Junglas

Special Functions for Engineers

Abstract. Well established *special functions* are an important tool to expand analytical methods in many engineering applications. Unfortunately, they have fallen out of fashion in engineering educational programs and are mainly replaced by direct numerical computations. But since they simplify the analysis of many practical problems, they should find a place again in engineering curricula. This claim is substantiated by examples from fluid mechanics, production planning, mechanics and vibration theory, employing the Lambert W function, the error function, elliptic and Bessel functions.

Introduction

The standard mathematical education of engineering students is usually divided into two different parts: In the first three semesters they learn basic concepts and calculation techniques from linear algebra, analysis and ordinary differential equations, and immediately apply them in mechanics, electrical engineering and vibration theory. The focus is on manual computations, using parameters to solve general problems and find optimal values. In the second part they come in touch with "real-world" problems and find that manual computations don't work anymore. This is the time for topics such as numerical mathematics, modeling and simulation and finite element computations. Now, parameter studies are done numerically, optimization often becomes a major numerical task. Usually missing in the curriculum are strategies to extend analytical methods, which can make parameter studies and optimization much simpler.

A conceptionally easy way to extend the computation capabilities is the introduction of *special functions*, which are well-known in applications and whose properties have been extensively studied [1]. This notion has no formal definition, some authors use the hypergeometric series or special classes of differential equations as unifying criterion [2]. We will stick here to the general consensus, including non-elementary functions that have proven their value in applications. Though many of them have interesting properties, when extended to the complex numbers, we will concentrate on real functions here.

In the following, we will use four different methods to define new function on $\mathbb{R}$: as inverse functions, antiderivatives, definite integrals with parameters or solutions of ordinary differential equations. Of course there are a lot of other possibilities, e.g. power series or integral transforms. In each case, we will shortly present an application problem, then introduce the special function needed, study some of its properties, and finally show, how to solve the original problem using them.

Inverse Functions

The first example is a standard problem in basic fluid mechanics lectures [3]: Given a horizontal pipe of length $l = 2$ km, diameter $d = 0.5$ m and surface roughness $k = 0.1$ mm that is used to transport a volume flow $\dot{V} = 1200\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$ of hot water of 85 °C. Compute the pressure loss Δp in the pipe. Following the standard procedure leads to an apparently simple equation that can't be solved analytically.

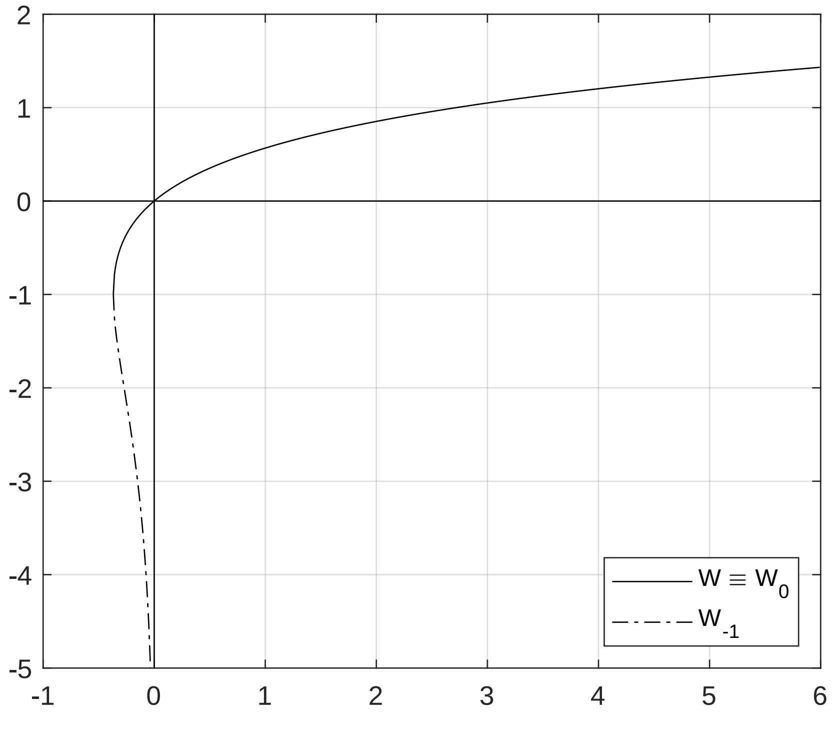


Figure 1: Lambert W function.

The *Lambert W function* is the upper branch of the inverse of $f(x) = x\,e^x$ for $x > -1/e$ (cf. Fig. 1). It is sometimes denoted as W_0, while the lower branch is named W_{-1}.

Amongst its many useful properties are (for suitable x, a)

$$\begin{aligned}
x\,e^x = a \quad &\Rightarrow \quad x = W(a) \\
x \ln x = a \quad &\Rightarrow \quad x = e^{W(a)} \\
x^x = a \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{\ln a}{W(\ln a)} \\
W'(x) &= \frac{W(x)}{x(1+W(x))} \\
\int W(x)\,dx &= x\left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right) + C
\end{aligned}$$

They are summarized in [4], together with many of its applications. In Matlab it is defined directly as `lambertw(x)`, the negative branch as `lambertw(-1, x)`.

Its applications span a lot of different areas, e. g. explicit solutions of some quantenmechanical systems, the kinetics of enzyme-catalysed reactions, crystal growth, solutions of the Einstein vacuum equations or the SIR equations of epidemiology. [5] even argues that due to its rich mathematical structure and abundant applications, it should be included in the set of elementary functions and taught at secondary or tertiary school levels.

Using the W function, the solution of the introductory example proceeds as follows: First one gets the temperature-dependent values of the density ρ and the kinematic viscosity ν from water tables and computes the dimensionless quantities

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} &= \frac{\overline{w}\,d}{\nu} = \frac{4\,\dot{V}}{\pi\,d\,\nu} \\
k_{rel} &= \frac{k}{d}
\end{aligned}$$

Next, one computes the Darcy friction factor λ by solving the Coleman equation

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{2}{\ln 10}\ln\left(\frac{2.51}{\mathrm{Re}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{k_{rel}}{3.7}\right).$$

To this end one introduces $x = 1/\sqrt{\lambda}$ and some obvious abbreviations to write it as

$$x = -c \ln(ax + b).$$

A bit of simple algebra leads to

$$\left(\frac{x}{c} + \frac{b}{ac}\right) e^{\frac{x}{c} + \frac{b}{ac}} = \frac{e^{\frac{b}{ac}}}{ac}$$

with the solution

$$x = c\,W\!\left(\frac{e^{\frac{b}{ac}}}{ac}\right) - \frac{b}{a}$$

leading to the numerical value

$$\lambda = 0.01415.$$

Finally the pressure loss is computed as

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \overline{w}^2 = 0.7900\,\mathrm{bar}\,.$$

Antiderivatives

The second example is concerned with first steps in production process planning: In a manufacturing process, resistors of $R = 47$ kΩ must be produced. They should belong to the norm series E12, i. e. the resistance R may not deviate from the specified value by more than 10%. The values actually produced are normally distributed with $E(X) = 47$ kΩ and $\sigma(X) = 3$ kΩ. Calculate the percentage of resistors produced that are in the permissable range. The mathematical problem is, of course, to compute the antiderivative of $f(x) = e^{-x^2}$.

The *error function* is defined as

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

(cf. Fig. 2). Since a basic course in stochastics is now standard in engineering curricula, this function is actually known to the students, together

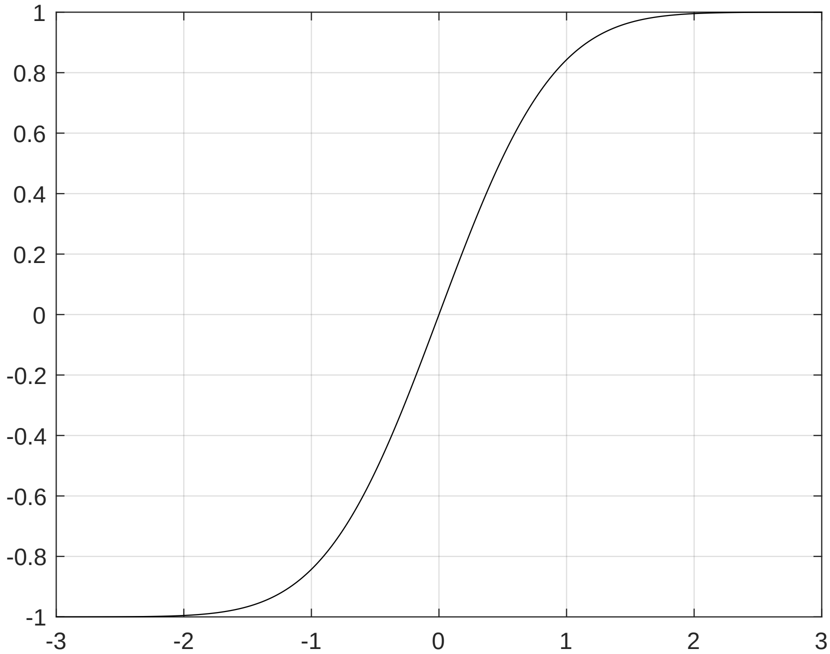


Figure 2: Error function.

with its basic properties

$$\begin{aligned}
\operatorname{erf}(-x) &= -\operatorname{erf}(x) \\
\operatorname{erf}(0) &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) &= 1
\end{aligned}$$

In Matlab it is given as `erf(x)`, and its complement by `erfc(x) = 1 - erf(x)`.

Related functions are the Fresnel integrals

$$\begin{aligned}
S(x) &:= \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} t^2 \, dt \\
C(x) &:= \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} t^2 \, dt,
\end{aligned}$$

which can be reduced to the error function of complex arguments.

As a consequence of the central limit theorem, the error function appears in lots of statistics applications. A variant is the Maxwell distribution function of molecule velocities in an ideal gas. Furthermore, it is important for the computation of heat conduction phenomena, since it is the fundamental solution of the heat equation. The Fresnel integrals describe the scattering of light around obstacles in the near-field region and – a bit surprisingly – optimal curves for motorway exits [6].

Exercise 2 is a standard example in stochastics: The distribution of the resistance values is given by

$$X \sim N(47, 9),$$

the percentage is

$$p = P(0.9 \cdot 47 \le X \le 1.1 \cdot 47).$$

Normalizing with

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

then leads to

$$p = P\Big(-\frac{4.7}{3} \le Z \le \frac{4.7}{3}\Big) = \mathrm{erf}\Big(\frac{4.7}{3\sqrt{2}}\Big) = 88.28\%.$$

Definite Integrals

The third exercise is a standard mechanics example: Given a mathematical pendulum of length $l = 1$ m, calculate the oscillation period for the initial values

$$\varphi_0 = 10°/90°/175°, \ \dot{\varphi}_0 = 0.$$

The difficult mathematical problem here is the computation of a definite integral with a parameter.

The *complete elliptic integral of the first kind* is defined as

$$K(m) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \vartheta}}, \quad m \in [0, 1)$$

(cf. Fig. 3). It has a lot of interesting properties, amongst them

$$K(0) = \frac{\pi}{2}, \quad K(1) = \infty$$

$$K(m) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \dots\right)$$

$$K(m) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$$

In Matlab in can be calculated with `ellipke(m)`.

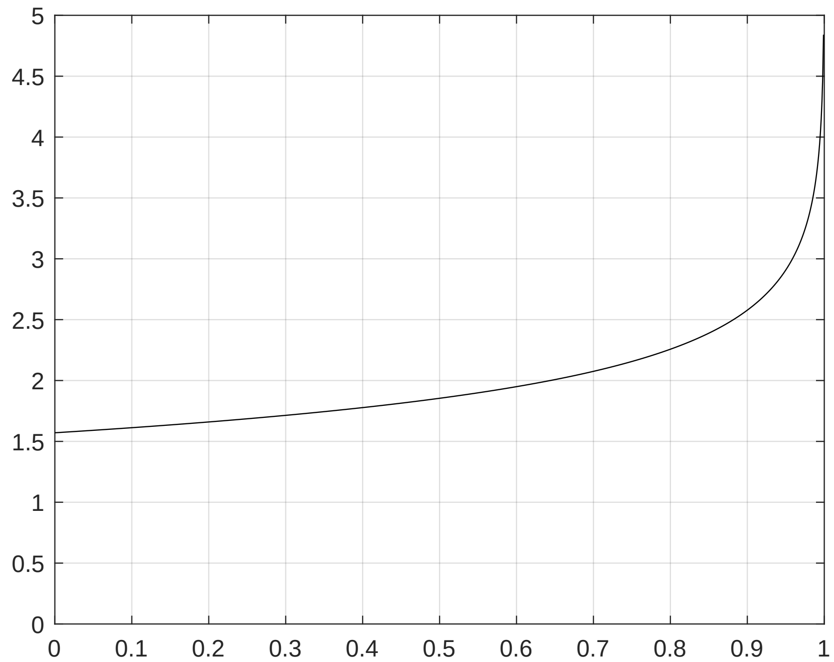


Figure 3: Complete elliptic integral of the first kind.

K belongs to the important family of elliptic integrals

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx,$$

where $P(x)$ is a polynomial of degree 3 or 4 (with 3 or 4 different roots to exclude "trivial" cases) and $R(x, y)$ is a non-trivial rational function of its two arguments. An important special case is the *incomplete elliptic integral of the first kind*

$$F(u, m) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}\, dt$$

with the connection

$$K(m) = F(1, m).$$

The inverse of F as function of u is called *Jacobi elliptic function sn*, it can be considered as a generalization of a harmonic function using a special nonlinear restoring force [7].

The elliptic integrals and elliptic functions play a prominent role in mathematics [8]: One of their first appearances was in the computation of the arc length of the ellipse (hence their name). In complex function theory, elliptic functions are defined as meromorphic, doubly periodic functions, with a deep connection to the elliptic integrals. They are the starting point of modern developments from elliptic curves to modular forms up to the proof of Fermat's theorem. They even provide an explicit solution of the quintic equation. They appear in many applications, such as the trajectory of the mathematical pendulum, the form of a skipping rope, the description of soliton waves or even in cryptography (ok, this needs a few further steps from here).

The solution of exercise 3 starts with the equation of motion

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

with

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Multiplying with $\dot{\varphi}$ and integrating (or simply by energy conservation) one gets

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

Integration from 0 to $T/4$ leads to

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

The – not so obvious – substitution

$$\sin u = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}$$

leads to

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2 u}}.$$

Introducing the oscillation period T_0 for very small initial φ_0

$$T_0 := \frac{2\pi}{\omega},$$

one finally gets

$$T = \frac{2T_0}{\pi} K\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Numerically the results for the different initial conditions are:

φ_0	T	$\frac{\lvert T-T_0\rvert}{T_0}$
10°	2.0521	0.0229
90°	2.6640	0.3280
175°	6.2141	2.0977

Obviously, the usual approximation $\sin\varphi \approx \varphi$ for small initial angles, leading to $T = T_0$, is completely wrong for values approaching 180°: The pole of $K(m)$ at $m = 1$ corresponds to the – unstable – equilibrium point at $\varphi_0 = \pi$.

Differential Equations

The final example is a standard problem from vibration theory: Given a circular membrane with wave speed c that is fixed at radius r_0, calculate the frequencies of the first 10 vibration modes. c can be computed from membrane properties such as elasticity and density and the tension forces applied to the membrane. Solving the wave equation for a circular geometry leads to an ordinary differential equation with solutions that cannot be expressed with elementary functions.

The *Bessel equation* is defined by

$$x^2 f'' + x f' + (x^2 - m^2) f = 0$$

for $m = 0, 1, 2, \ldots$ and positive x. For given m, the equation has two linearly independent solutions J_m and Y_m, the *Bessel functions* of the first and second kind, where $J_m(0)$ is finite, whereas Y_m has a pole at 0 (cf. Fig. 4). They have infinitely many zeros, which will be denoted by $j_{m,n}$ and $y_{m,n}$ for $n = 1, 2, \ldots$.

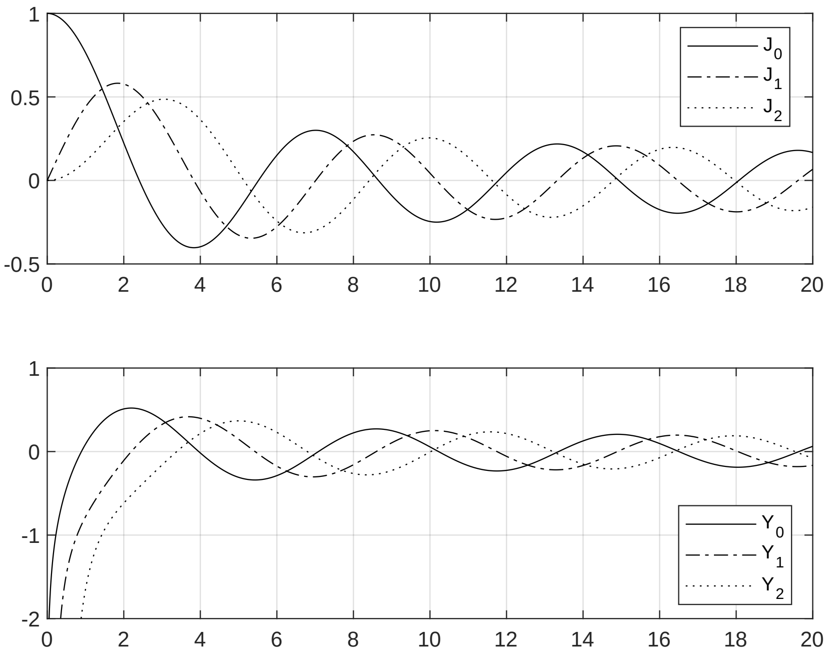


Figure 4: Bessel functions.

The Bessel functions satisfy the recurrence relations

$$\begin{aligned} \frac{2m}{x} J_m(x) &= J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) \\ 2J'_m(x) &= J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) \end{aligned}$$

and the orthogonality relation [9]

$$\int_0^\infty J_m(x) J_n(x)\, \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(m-n)\right)}{m^2 - n^2}.$$

For large x they are approximately harmonic

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 1.$$

In Matlab values of the Bessel functions can be calculated with `besselj(m,x)` and `bessely(m,x)`. Their zeros can be computed with `fzero`, but a much faster and more reliable function `besselzero` is available at the MATLAB Central File Exchange [10].

Closely related functions are the Hankel functions, which are complex linear combinations of J_m and Y_m. Furthermore, solutions of the Bessel equations are studied for arbitrary (non-integer) values of m. Especially useful in applications are the solutions with half-integer m, the *spherical Bessel functions*.

The Bessel functions appear in all kinds of physical applications with cylindrical symmetry, e. g. electromagnetic waves in a waveguide, heat conduction, wave functions in quantum mechanics or diffraction through an aperture. In corresponding situations with spherical symmetry, the spherical Bessel functions are similarly useful.

To solve exercise 4, one starts by writing the two-dimensional wave equation using polar coordinates:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{c^2}u_{tt}.$$

For the computation of eigen modes, one assumes a harmonic time behaviour and a separation of space variables:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi,t) &= f(r)g(\varphi)\cos(\omega t) \\ \Rightarrow \qquad g(\varphi) &= A\cos(m\varphi + \varphi_0), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Introducing $k := \omega/c$ and changing the variable from r to $z := k\,r$, one gets the Bessel equation for $f(z)$. Certainly, the vibration must be finite at $r = 0$, therefore the J_m are the only solutions. Since the membrane is fixed at the circle $r = r_0$, we have

$$J_m(k\,r_0) = 0,$$

giving eigen frequencies at

$$\omega = \frac{c}{r_0} j_{m,n}.$$

A table of zeros $j_{m,n}$ for $m = 0 \ldots 5$ and $n = 1 \ldots 4$ provides enough values to find the ten lowest modes and corresponding frequencies:

n / m	1	2	3	4
0	*2.40	*5.52	*8.65	11.79
1	*3.83	*7.02	10.17	13.32
2	*5.14	*8.42	11.62	14.80
3	*6.38	9.76	13.02	16.22
4	*7.59	11.06	14.37	17.62
5	*8.77	12.34	15.70	18.98

Conclusions

Special functions play an important role in many applications, especially, but not confined to electrical and mechanical engineering, physics and statistics. Consequently, their definitions and properties should be included in engineering curricula. A standard mathematics course in analysis and differential equations seems to be an appropriate place to include this topic. But since the time is already too short to cover the basic material, this seems unfeasible in practice. In a non-systematic fashion, special functions could be included as examples or in homework exercises. But it would probably be better to integrate them into application courses as soon as they are needed.

Of course, special functions are an interesting topic for mathematicians as well: They provide lots of important examples, allow to extend tools from analysis and often are starting points for complete new areas. The general tendency to teach mathematics by starting with abstract notions often leaves students without a proper understanding of the motivation behind the definitions. Topics like special functions can provide a basis for later abstraction and a feeling for the many interconnections between seemingly unrelated areas of mathematics.

Unfortunately, special functions have fallen out of fashion in teaching engineering students and are often replaced by numerical methods. This can have severe consequences, e. g. when optimization with many parameters is done directly using complex and computationally intense numerical methods, where applying analytical methods could lead to much faster and more reliable computations. Hopefully, the explicit examples provided here have shown that special functions deserve a renaissance, not only for practical purposes, but in the spirit of Hammings famous motto:

The purpose of computing is insight, not numbers. [11]

Bibliography

[1] **Abramowitz, M.; Stegun, I. A.**: *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications New York, 9th ed. (1970).

[2] **Nikiforov, A. F.; Uvarov, V. B.**: *Special Functions of Mathematical Physics – A Unified Introduction with Applications.* Birkhäuser Boston (1988).

[3] **Hibbeler, R. C.**: *Fluid Mechanics in SI Units.* Pearson London, 2nd ed. (2020).

[4] **Corless, R. M.; Gonnet, G. H.; Hare, D. E. G.; Jeffrey, D. J.; Knuth, D. E.**: *On the Lambert W function.* Advances in Computational Mathematics, 1, **5**, 329–359 (1996).

[5] **Stewart, S.**: *A new elementary function for our curricula?* Australian Senior Mathematics Journal, 2, **19**, 8–26 (2005).

[6] **Meek, D. S.; Walton, D. J.**: *The use of Cornu spirals in drawing planar curves of controlled curvature.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 1, **25**, 69–78 (1989).

[7] **Schott, D.**: *Verallgemeinerte trigonometrische Funktionen unter besonderer Berücksichtigung von Schwingermodellen.* In: Proc. des 13. Workshops Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Lingen, Germany, 45–52 (2016).

[8] **Takebe, T.**: *Elliptic Integrals and Elliptic Functions.* Springer Cham (2023).

[9] **Watson, G. N.**: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press London, 2nd ed. (1966).

[10] **Nicholson, J.**: *Bessel Zero Solver.* MATLAB Central File Exchange, https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/48403-bessel-zero-solver (2018).

[11] **Hamming, R.**: *Numerical Methods for Scientists and Engineers.* McGraw-Hill New York (1962).

Author

Prof. Dr. rer. nat. Peter Junglas
Private Hochschule für Wirtschaft und Technik Vechta/Diepholz
Am Campus 2
D-49356 Diepholz
E-Mail: peter@peter-junglas.de

Markus Schmidt-Gröttrup

Catalan-Zahlen und Catalan-Dreieckszahlen

Zusammenfassung. „A North Star on the Mathematical Sky “nennt Thomas Koshy die *Catalan-Zahlen* im Vorwort seines Buches [6]. Die Fülle verschiedenster kombinatorischer Aufgabenstellungen, die zu den Catalan-Zahlen führen, ist in der Tat bemerkenswert. Sie bieten jede Menge Gelegenheit für interessante und anschauliche Aufgabenstellungen. Umso erstaunlicher, dass sie im Rahmen von Schul- und Hochschulausbildung bisher kaum zu finden sind. Im ersten Teil werden beispielhafte Aufgabenstellungen gezeigt. Der zweite Teil legt die Übereinstimmungen zwischen den verschiedenen Rekursionsformeln dar, bietet einige Bijektionen zwischen den Kombinationsmengen und verweist auf Methoden Kombinationen einheitlich zu indizieren. Der dritte Teil befasst sich mit den *Catalan-Dreieckszahlen* und ihrer Verwandtschaft zu den Binomialkoeffizienten. Der abschließende Teil hält einige mathematische Überraschungen und etwas zur Geschichte bereit.

Catalan-Zahlen

In *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* steht zu den *Catalan-Zahlen* „This is probably the longest entry in the OEIS, and rightly so“[11]. Hier begrenzen wir uns auf wenige wichtige und besonders anschauliche Anwendungsfälle.

Triangulation eines konvexen $n+2$-Ecks

Ein konvexes Polygon wird so trianguliert, dass die Eckpunkte aller Dreiecke Eckpunkte des Polygons sind. Ein $n+2$-Eck wird dadurch in n Dreiecke zerlegt. Für $n = 1$ ist das Dreieck bereits trianguliert, für $n = 2$ gibt es für das Viereck zwei, für ein Sechseck bereits vierzehn verschiedene Triangulationen, siehe Abbildung 1. Symmetrien werden bei der Zählung nicht berücksichtigt, die Triangulationen werden durch z.B. durch eine Basis-Seite eindeutig.

Bereits im 18. Jahrhundert ist das Problem bekannt und gelöst. Leonhard Euler notiert die Formel für die Anzahl E_n der Triangulationen eines n-Ecks: $E_n = \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-10)}{(n-1)!}$. Dörrie zitiert zu dieser Formel Euler: „Die Induktion, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam“[5]. Die heute

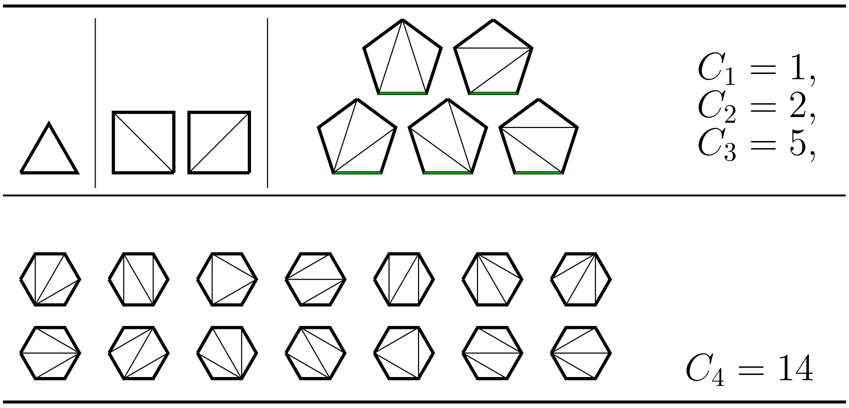


Abb. 1: Triangulationen für Drei- bis Sechseck (n=1 bis 4)

übliche Definition der Catalan-Zahlen bezieht sich auf die Anzahl der Triangulationen eines $n+2$-Ecks

$$C_n = E_{n+2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n)}{(n+1)!\, n!\, 4^n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Ausbalancierte Klammern

Klammernpaare, bei denen zu jeder geöffneten Klammer genau eine schließende Klammer gehört, die nach dieser kommt, sind ein weiteres Beispiel für Catalan-Zahlen: zu n Klammerpaaren gibt es genau C_n mögliche Klammerungen, siehe Abbildung 2.

Klammerpaare machen diese Rekursion für C_n anschaulich:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, C_{n-i}. \quad \text{Rekursionsformel nach Segner.}$$

Dazu werden die Kombinationen von Klammerpaarungen nach der Position der schließenden Klammer sortiert, die zur ersten geöffneten Klammer gehört, siehe Abbildung 3. In der ersten Gruppe enthält das mit eckigen Klammern markierte Klammerpaar keine Klammernpaare, dafür gibt es eine Möglichkeit ($C_0 = 1$). Die auf das markierte Paar folgenden Klammern haben noch $n = 4$ Klammerpaare, dafür gibt es $C_4 = 14$ Möglichkeiten. In der nächsten Gruppe enthält das markierte Klammerpaar ein Klammerpaar, mit einer Möglichkeit ($C_1 = 1$) und die nachstehenden Klammern

Kein Paar ∅	$C_0 = 1$
1 Paar ()	$C_1 = 1$
2 Paare (()), ()()	$C_2 = 2$
3 Paare ((())), (())(), (()()), ()(()), ()()()	$C_3 = 5$
4 Paare ()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())), (())()(), (())(()), (()())(), (()()()), (()(())), ((()))(), ((())()), ((()())), (((())))	$C_4 = 14$

Abb. 2: Ausbalancierte Klammernpaare von n=0 bis 4 Paaren

[]()()()(), []()()(()), []()(())(), []()(()()), []()((())), [](())()(), [](())(()), [](()())(), [](()()()), [](()(())), []((()))(), []((())()), []((()())), []((((())))), [()] ()()(), [()] ()(()), [()] (())(), [()] (()()), [()] ((())), [()()] ()(), [()()] (()), [(())] ()(), [(())] (()), [()()()] (), [()(())] (), [(()())] (), [(())()] (), [((()))] (), [()()()()], [()()(())], [()(())()], [()(()())], [()((()))], [(())()()], [(())(())], [(()())()], [(()()())], [(()(()))], [((()))()], [((())())], [((()()))], [(((())))]

Abb. 3: Klammernpaare aus je fünf Paaren. Das jeweils erste zusammengehörige Klammerpaar ist als eckige Klammer dargestellt.

noch drei Klammernpaare mit $C_3 = 5$ Möglichkeiten, usf. Die Rekursionsformel nach Segner folgt unmittelbar.

Monotone Pfade

Ein Pfad durch ein $n \times n$-Gitter verbindet Koordinate $(0,0)$ mit der Koordinate (n,n); er wird nur durch horizontale und vertikale Linien gebildet und muss die minimal mögliche Länge $2\,n$ einhalten. Da er aus n horizontalen und n vertikalen Strecken der Länge 1 zusammengesetzt ist, gibt es $\binom{2n}{n}$ mögliche Pfade. Monotone Pfade sind solche, die nur unterhalb der Diagonale verlaufen. Es gibt genau C_n monotone Pfade. Dies kann durch einen einfachen Spiegelungstrick veranschaulicht werden, siehe Abbildung 4. Bei Pfaden, die die Diagonale überschreiten, wird der Teil des Pfades ab der ersten Überschreitung der Diagonale an der oberhalb dieser verlaufenden Linie gespiegelt. Er endet dann in der Koordinate $(n-1, n+1)$. Pfade, die von $(0,0)$ nach $(n-1, n+1)$ verlaufen, kreuzen auf jeden Fall die Diagonale und lassen sich auf einen die Diagonale kreuzenden Pfad im $n \times n$-Gitter zurückspiegeln. Von diesen gibt es $\binom{2n}{n+1}$ mögliche Pfade. Deshalb ist die Anzahl monotoner Pfade: $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{(n+1)\,(2n)!}{(n+1)!\,n!} - \frac{n\,(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

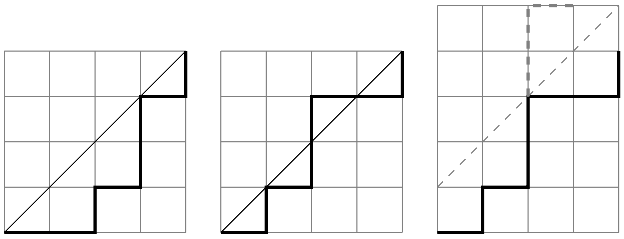


Abb. 4: Links: Monotoner Pfad, der die Diagonale nicht kreuzt.
Mitte: Pfad, der die Diagonale kreuzt.
Rechts: Spiegelung des vorigen nach Kreuzung der Diagonale.

Volle Binärbäume

Binärbäume sind für Sortierungen wichtige Spezialfälle von Graphen. Ein *voller* oder saturierter *Binärbaum* hat in jedem Knoten entweder keine oder zwei Kindknoten. Als *innere Knoten* werden die Knoten mit zwei Kindern bezeichnet, die übrigen sind Blätter. Ein voller Binärbaum mit n inneren Knoten hat $n+1$ Blätter, siehe Abbildung 5.

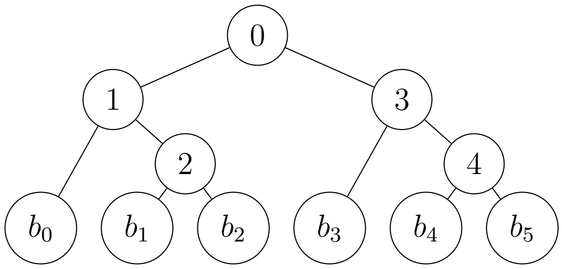


Abb. 5: Voller Binärbaum mit fünf inneren Knoten (0-4) und sechs Blättern $(b_0, b_1, ..., b_5)$.

Die Rekursionsformel nach Segner für die Anzahl voller Binärbäume mit n inneren Knoten erschließt sich unmittelbar: hat ein voller Binärbaum mit $n+1$ inneren Knoten unter dem Wurzelknoten links einen vollen Binärbaum mit i Knoten, befindet sich rechts ein Binärbaum mit $n-i$ inneren Knoten, dabei kann i alle Werte von 0 bis n annehmen.

Mehr Beispiele

Wurzelbäume können im Unterschied zu Binärbäumen bei jedem inneren Knoten beliebig viele Kindknoten haben. Zu Wurzelbäumen mit n Kanten gibt es ebenfalls genau C_n mögliche Kombinationen, siehe Abbildung 6.

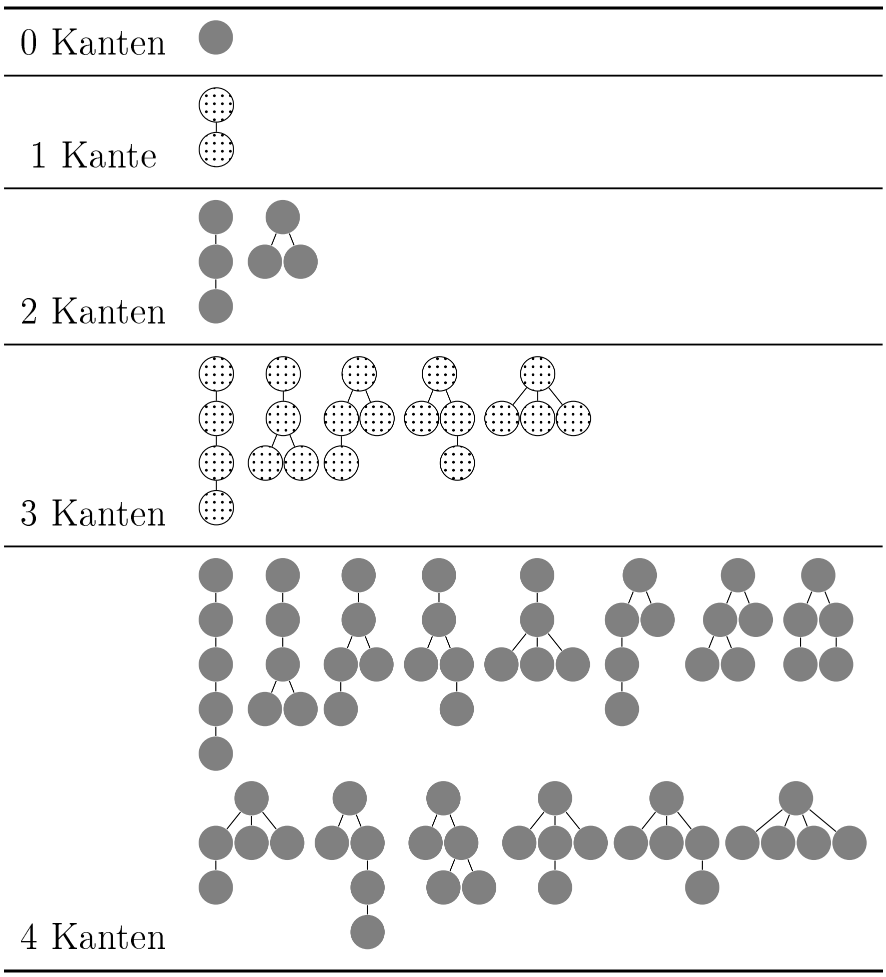


Abb. 6: Wurzelbäume mit n Kanten für $n = 0, ..., 4$.

Auch hier ergibt sich die Segner-Rekursionsformel durch eine einfache Überlegung. Der Wurzelknoten eines Wurzelbaums mit $n+1$ Kanten hat einen (ersten) Kindsknoten. Befinden sich unter diesem weitere i Kanten, sind die übrigen $n-i$ direkt unter dem Wurzelknoten angebracht. Die Anzahl i kann wieder alle Werte von 0 bis n annehmen.

Gebirgssilhouetten können durch schräge Linien dargestellt werden, wobei gleich viele auf- wie absteigende Linien verwendet werden und die Silhouette durchgehend über dem Startlevel bleibt, siehe Abbildung 7. Die Übereinstimmung mit balancierten Klammerpaaren ist offensichtlich.

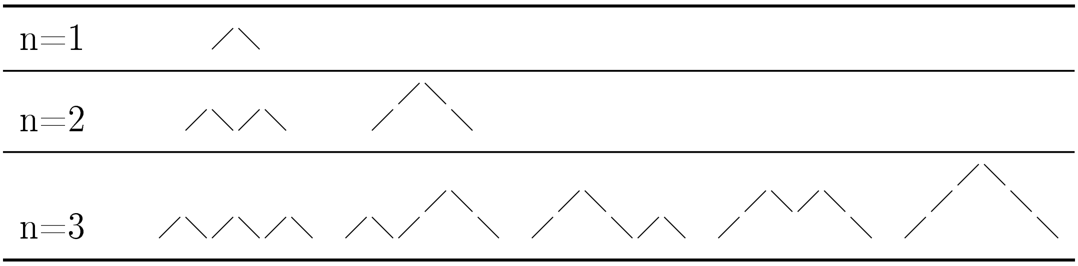


Abb. 7: Gebirgssilhouetten aus n Linienpaaren für $n = 1, ..., 3$.

Multiplikationsreihenfolgen legen fest, in welcher Reihenfolge die Faktoren multipliziert werden, siehe Abbildung 8. Die Abfolge der Faktoren wird dabei nicht geändert. Für eine assoziative, aber nicht kommutative Verknüpfung kann so die Anzahl der möglichen Berechnungen bei n Verknüfungen bestimmt werden. Die Multiplikationsfolgen lassen sich den Klammerpaaren zuordnen, indem öffnende Klammern und die Variablen entfernt werden und der Multiplikationspunkt durch eine offene Klammer ersetzt wird.

$n=0$	a		
$n=1$	$(a \cdot b)$		
$n=2$	$((a \cdot b) \cdot c)$,	$(a \cdot (b \cdot c))$	
$n=3$	$(((a \cdot b) \cdot c) \cdot d)$, $(a \cdot ((b \cdot c) \cdot d))$,	$((a \cdot b) \cdot (c \cdot d))$, $(a \cdot (b \cdot (c \cdot d)))$	$((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d)$,
$n=4$	$((((a \cdot b) \cdot c) \cdot d) \cdot e)$, $((a \cdot b) \cdot ((c \cdot d) \cdot e))$, $((a \cdot (b \cdot c)) \cdot (d \cdot e))$, $(a \cdot (((b \cdot c) \cdot d) \cdot e))$, $(a \cdot (b \cdot ((c \cdot d) \cdot e)))$,	$(((a \cdot b) \cdot c) \cdot (d \cdot e))$, $((a \cdot b) \cdot (c \cdot (d \cdot e)))$, $((a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)) \cdot e)$, $(a \cdot ((b \cdot c) \cdot (d \cdot e)))$, $(a \cdot (b \cdot (c \cdot (d \cdot e))))$	$(((a \cdot b) \cdot (c \cdot d)) \cdot e)$, $(((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d) \cdot e)$, $((a \cdot (b \cdot (c \cdot d))) \cdot e)$, $(a \cdot ((b \cdot (c \cdot d)) \cdot e))$,

Abb. 8: Multiplikationsreihenfolgen.

Handreichungen über einen Tisch von $2\,n$ Personen am Tisch, die jeweils einer andern Person die Hand reichen, ohne dass sich Hände überkreuzen, sind das nächste Beispiel, siehe Abbildung 9. Sie sind erneut mit der Rekursionsformel nach Segner abzählbar. Für eine Person an einem Tisch mit $2n + 2$ Personen, gibt es $n + 1$ mögliche Partner, da sich auf beiden Seiten des Tisches zwischen dem Handschlag der Person und ihrem Parter jeweils eine gerade Anzahl von Personen befinden muss. Andernfalls gibt es keine Lösung ohne Überkreuzung mehr. Dann befinden sich auf der einen Seite i Paare und auf der anderen Seite $n-i$ Paare, für $i = 0, ..., n$.

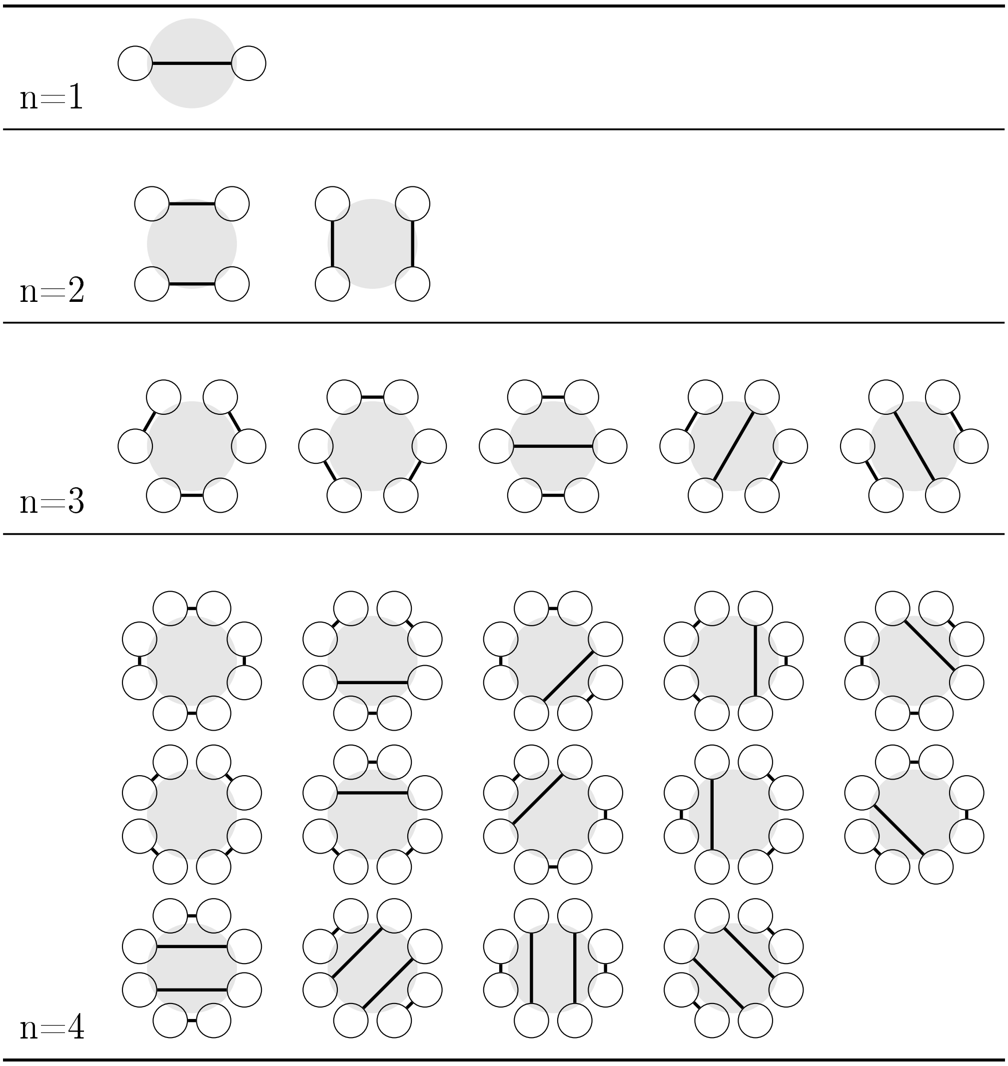


Abb. 9: Handreichung über einen Tisch für n Paare ohne Überkreuzung aus n Linienpaaren für $n = 1, ..., 4$.

Die *Zerlegung einer Treppe* aus n Stufen in n Rechtecke, siehe Abbildung 10, ist wieder in genau C_n Versionen möglich.

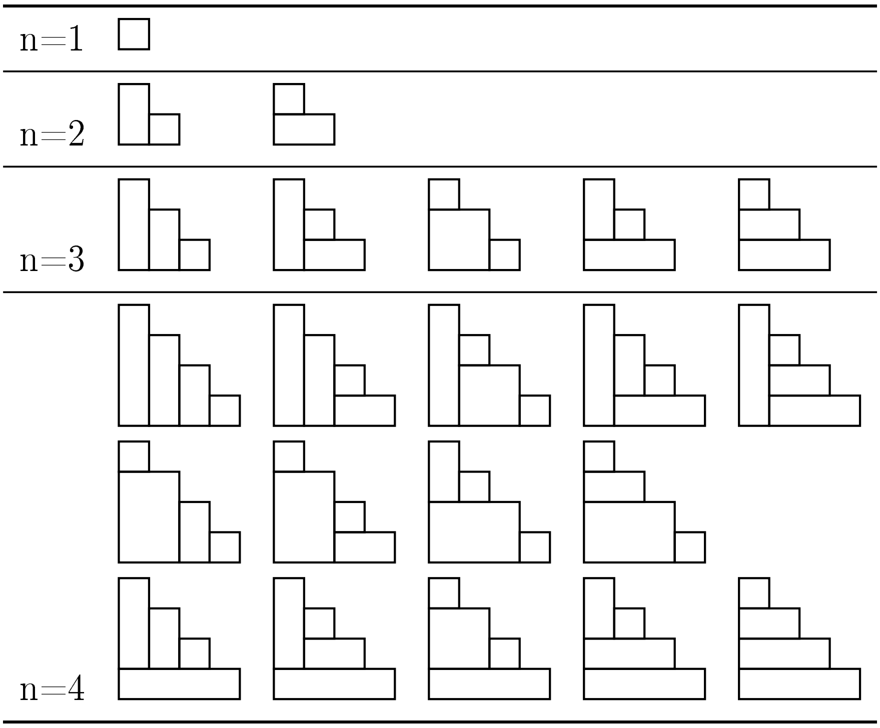


Abb. 10: Treppen mit n Stufen in n Rechtecke zerlegt.

Übereinstimmungen

Rekursion

Bisher wurde die Euler-Formel $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ für monotone Pfade gezeigt und die Segner-Rekursion $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, C_{n-i}$ mit $C_0 = 1$ für die meisten anderen Beispiele. Dass beide Formel die identische Folge bilden, wird jetzt für die Triangulation eines $n+2$-Ecks betrachtet.

Zum einen gilt die Segner-Formel. Dazu sei ein $n+3$-Eck gegeben und es wird das Dreieck betrachtet, das die Grundseite des $n+3$-Ecks enthält. Diese Dreieck zerlegt das Polygon in zwei konvexe Polygone, die $k+2$ bzw. $n-k+2$ Seiten haben, wobei k von 0 bis n läuft, vergleiche Abbildung 13. Dies belegt die Gültigkeit der Segner-Rekursion.

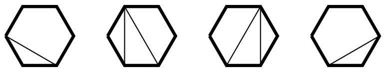


Abb. 11: Für ein $4+2$-Eck gibt es vier mögliche Dreiecke über der Grundseite.

Zum anderen kann eine Rekursion der ersten Ordnung erstellt werden. Dazu wird ein $(n+2)$-Eck P und ein $(n+3)$-Eck Q betrachtet, siehe

Abbildung 12. Im triangulierten $(n+2)$-Eck P wird eine orientierte Kante markiert. Diese wird längs der Pfeilrichtung zu einem Dreieck aufgezogen. Es ergibt sich ein trianguliertes (n+3)-Eck Q, dessen neu entstandene Seite markiert ist. Diese ist nicht die Basis-Seite.

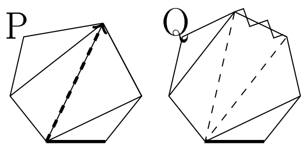


Abb. 12: Das $n+2$-Eck P mit markierter orientierter Kante und das $n+3$-Eck Q mit markierter Seite. Die Basis-Seite ist jeweils fett dargestellt.

Umgekehrt kann in Q eine Seite außer der Basisseite markiert werden. Das zur markierten Seite gehörige Dreieck wird durch Zusammenziehen zu einem $(n+2)$-Eck reduziert, dessen Kante in die Richtung der verschwindenden Seite orientiert ist. Das $n+2$-Eck P hat $n+2$ Aussenseiten und $n-1$ Triangulationskanten, also $2n+1$ orientierbare Kanten. Zu seinen C_n Triangulationen gibt es damit je $(4n+2)$ orientiere Markierungen. Das $n+3$-Eck Q hat ohne die Basisseite $n+2$ Seiten. Deshalb gilt $(4n+2)\,C_n = (n+2)C_{n+1}$ und damit die Rekursion erster Ordnung $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}\,C_n$. Die Übereinstimmung zur Euler-Formel kann einfach durch vollständige Induktion gezeigt werden. Die drei Formeln für die Catalan-Zahlen sind damit:

- $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$,
- $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}\,C_n$, $C_0 = 1$,
- $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\,C_{n-i}$, $C_0 = 1$.

Bijektionen

Mit dem Aufstellen einer Bijektion zwischen den Kombinationen zweier verschiedener Anwendungen der Catalan-Zahlen ergibt sich ein tieferes Verständnis für deren kombinatorische Prinzip. Dies wird exemplarisch für die Triangulationen und die Treppen-Zerlegung dargestellt.

Eine Entsprechung der Zerlegung eines $n+2$-Ecks in n Dreiecke oder einer n-stufigen Treppe in n Rechtecke erscheint nur auf den ersten Blick offensichtlich. Dann fallen die Unterschiede auf: $n+2$ Ecken und Seiten und n Treppenstufen, Dreiecke und Rechtecke.

Eine einfache Beobachtung hilft weiter: Bei der Zerlegung der Treppe sind alle n Treppenstufen in verschiedenen Rechtecken, sonst müsste die Zerlegung über einer Treppenstufe liegende Quadrate mit einschließen. Daher ist der Basispunkt B, der in der Zeile der untersten Treppenstufe und der Spalte der höchsten Stufe liegt, immer in einem Rechteck mit einer der Treppenstufen. Und bei der Zerlegung des $n+2$-Ecks bildet die Basisseite immer ein Dreieck mit einer der anderen n Ecken. Das Dreieck zur Basisseite entspricht dem Rechteck mit dem Basispunkt. Auf beiden Seiten von Dreieck bzw. Rechteck ergibt sich wieder eine entsprechende Zerlegungsaufgabe.

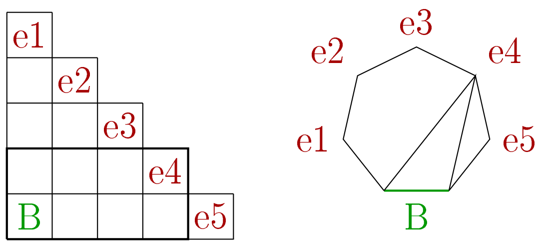


Abb. 13: Bijektion zwischen Treppen-Zerlegung und Triangulationen eines Polygons. Der Basispunkt der Treppe entspricht der Basisseite des $n+2$-Ecks, die Treppenstufen den nicht zur Basisseite gehörenden Ecken.

Abzählungen

Im Beitrag von Črepinsek und Mernik wird eine Repräsentation vorgestellt, die für verschiedenste Catalan-Aufgabenstellungen angewendet werden kann [3]. Die einzelne Kombination, deren Gesamtheit durch C_n abgezählt wird, wird durch einen Zahlen-Vektor $(i_0, i_1, ..., i_{n-2}, i_{n-1})$ der Länge n indiziert, der folgenden Bedingungen genügt: $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$ ist i_k

- ganzzahlig und nichtnegativ: $i_k \in \mathbb{N}_0$,
- positionsbeschränkt: $i_k \leq k$,
- monoton steigend: $i_k \leq i_{k+1}$.

Die Indizes für $n = 4$ sind dann:
$(0,0,0,0); (0,0,0,1); (0,0,0,2); (0,0,0,3); (0,0,1,1); (0,0,1,2); (0,0,1,3); (0,0,2,2); (0,0,2,3); (0,1,1,1); (0,1,1,2); (0,1,1,3); (0,1,2,2); (0,1,2,3)$

Für den links in Abbildung 4 gezeigten monotonen Pfad ist der Index $(0,0,1,3)$, also die Höhe, in der sich die horizontalen Linenstücke befinden.

Für den in Abbildung 5 gezeigten Binärbaum lautet der Kombinationsvektor $(0,0,1,3,4)$ und wird wie folgt in den Binärbaum umgesetzt. Die Einträge des Vektors werden von hinten abgearbeitet. Mit der 4 werden die Blätter b_4 und b_5 unter einen neuen Knoten angeordnet. Mit der 3 wird dann b_3 und dieser unter den nächsten neuen Knoten angeordnet. Mit der 1 werden b_1 und b_2 unter einen neuen Knoten angeordnet, die 0 ordnet den Knoten b_0 und den letzten neuen unter dem vorletzten inneren Knoten an. Die 0 ganz vorne im Vektor verbindet die beiden verbliebenen Knoten auf oberster Ebene durch den Wurzelknoten.

Catalan-Dreieckszahlen

Monotone Pfade und Ähnlichkeit mit Binomialkoeffizienten

Es werden die möglichen Pfade betrachtet, in einem durch die Diagonale begrenzten Gitter auf kürzestem Weg zu einem anderen Gitterpunkt zu kommen. Die Anzahl der Wege zu einem Gitterpunkt addiert sich dabei aus den Anzahlen der Wege zu dem vertikal benachbarten und horizontal benachbarten Gitterpunkt, über die der kürzeste Weg laufen muss. Insofern besteht große Ähnlichkeit zum Pascal-Dreieck, in dem die Anzahl der Wege sich aus den beiden überliegenden Anzahlen addiert. Um diese Ähnlichkeit zu unterstreichen, wird die Ausgangszahl an die Spitze gestellt, vergleiche Abbildung 14. Die Binomialkoeffizienten addieren sich aus den beiden Zahlen im „Norden “, die Catalan-Dreieckszahlen aus der Zahl im „Norden “und der im „Westen “.

Rekursion und Lösung

Die Catalan-Dreieckzahlen folgen dieser Formel $c_{nk} = \frac{(n-k+1)(n+k)!}{k!(n+1)!}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 2 & & & \\
1 & 3 & 5 & 5 & & \\
1 & 4 & 9 & 14 & 14 & \\
1 & 5 & 14 & 28 & 42 & 42
\end{array}
$$

Abb. 14: Binomialkoeffizienten und Catalan-Dreieckszahlen zeigen die Anzahlen an Wegen, die von der Ausgangszahl 1 an der Spitze zum jeweiligen Gitterpunkt führen. Sie addieren sich daher je zwei benachbarten Zahlen.

Dies liefert sofort $c_{n,0} = 1$, $c_{n,1} = n$, $c_{n,n+1} = 0$ und $C_n = c_{n,n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Die Rekursionsgleichung $c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n,k-1}$ lässt sich aus der Formel einfach ableiten. Es ist $c_{n-1,k} = \frac{(n-k)(n+k-1)!}{k!(n)!}$ und $c_{n,k-1} = \frac{(n-k+2)(n+k-1)!}{(k-1)!(n+1)!}$ also $k!(n+1)! \cdot (c_{n-1,k} + c_{n,k-1}) =$
$(n+1)(n-k)(n+k-1)! + k(n-k+2)(n+k-1)!) =$
$\big((n^2 - nk + n - k) + (nk - k^2 + 2k)\big)\,(n+k-1)! =$
$(n^2 - k^2 + n - k)(n+k-1)! = (n-k+1)(n+k)(n+k-1)! =$
$(n-k+1)(n+k)!$. Der letzte Ausdruck ist genau der Zähler in der Catalan-Dreiecksformel.

Ähnlich wie bei den Binomialkoeffizienten bilden die ungeraden Zahlen im Catalan-Dreieck Sierpinsky-Dreiecke aus, siehe Abbildung 15. Eine Fülle weiterer Zusammenhänge zwischen Catalan-Dreieckszahlen und Binomialkoeffizienten findet sich im Buch von Koshy [6], darunter auch die einfach zu beweisende Tatsache, dass 2 und 5 die einzigen Primzahlen unter c_{nk} für $k > 1$ sind.

Mathematische Überraschungen

Hankel-Matrizen

Eine überaus originelle Eigenschaft der Catalan-Zahlen ergibt sich mit *Hankel-Matrizen.* Hankel-Matrizen sind quadratische Matrizen mit konstanten Nebendiagonalen. D.h. $\mathbf{H} = (h_{ij})$ ist eine Hankel-Matrix, wenn $i + j = k + l \Rightarrow h_{ij} = h_{kl}$. Werden die Werte mit Catalan-Zahlen besetzt ergibt sich für die Determinanten:

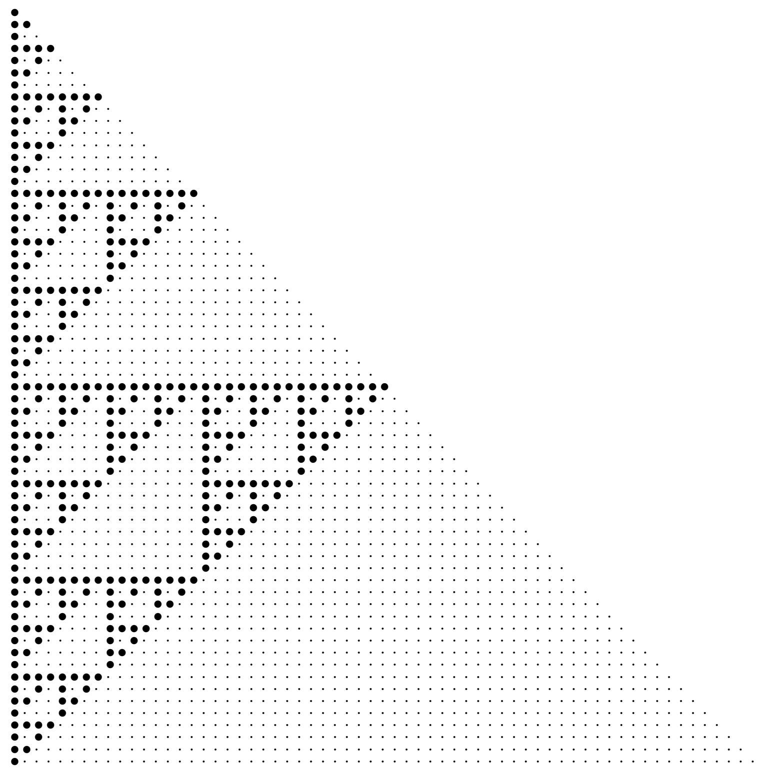


Abb. 15: Die Markierung der ungeraden Zahlen im Catalan-Dreieck

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & \cdots & C_{2n-2} \end{vmatrix} = 1 \text{ sowie } \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-1} \end{vmatrix} = 1.$$

Darüberhinaus ist die Folge (C_n) durch diese beiden Determinanten-Gleichungen eindeutig bestimmt [8].

Ein geometrisches Rätsel dank der generierenden Funktion

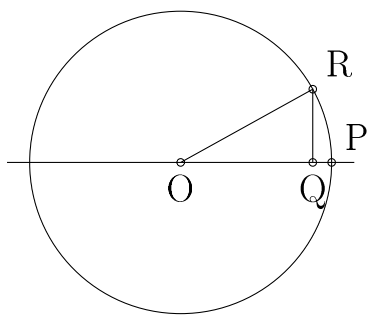


Abb. 16: Länge der Strecke $|QP|$ bei $|OR| = r$ und $|QR| = 1$, nach [4].

Untersucht wird die Länge der Strecke $|QP|$, wenn $|QR| = 1$,

$|OR| = |OP| = r$, $\angle(OQP) = \frac{\pi}{2}$ und O der Mittelpunkt des Kreises aus Abbildung 16. Es ist $r^2 = |OR|^2 = |OQ|^2 + 1$ und $|QP| = |OP| - |OQ|$ also $|QP| = r - \sqrt{r^2 - 1}$. Für $r = 5$ ergibt sich $QP = 0.101020514433643803....$ Die Catalan-Zahlen $1, 1, 2, 5, 14$ und näherungsweise 42 tauchen in der Dezimal-Entwicklung auf. Für $r = 5,000,000$ wird es noch merkwürdiger: |QP|=
0.0000001000000000000010000000000000200000000000000500000000000001400000000000004200000
0000001320000000000004290000000000143000000000004862000000000016796000000000058786000
000002080120000000074290000000002674440000000009694845000000035357670000001296447900
000047763870000001767263190000065641204200000244662670200000914825636400034305961365
001289904147324048619464014521836735307215269533550916006 ...

Hier sind die ersten 27 Catalan-Zahlen in den Dezimalstellen ablesbar. Wie ist das zu erklären?

Dazu wird die generierende Funktion zur Folge der Catalan-Zahlen bestimmt: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i\, x^i$. Wird $f(x)$ quadriert und die Terme nach Potenzen von x sortiert, ergibt sich unter Verwendung der Rekursionsformel nach Segner $f(z)^2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i\, x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, x^j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i\, C_j\, x^{i+j} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} C_i\, C_{k-i}\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}\, x^k$. Somit ist $f(x) = C_0 + x\, f(x)^2$ oder mit $f = f(x)$ die quadratische Gleichung $x\, f^2 - f + 1 = 0$. Eine Lösung der Gleichung ist $f = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$. Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung ist nicht anwendbar, da sie für $x \to 0$ divergiert anstatt gegen $f(0) = C_0 = 1$ zu konvergieren. Die generierende Funktion ist daher $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Wird jetzt die Länge der Strecke QP für $r = 5 \cdot 10^{k-1}$ bestimmt, ergibt sich $|QP| = 5 \cdot 10^{k-1} - \sqrt{25 \cdot 10^{2k-2} - 1} = \frac{10^k - \sqrt{10^{2k} - 4}}{2} = \frac{1-\sqrt{1-4\cdot 10^{-2k}}}{2\cdot 10^{-k}} = \frac{1}{10^k} f(10^{-2k}) = \frac{1}{10^k}\sum_{i=0}^{\infty} C_i\, 10^{-2ik}$.

Anwendung von Catalan-Rekursionen

Nach der Fülle der Beispiele nimmt es nicht Wunder, dass Catalan-Zahlen in so verschiedenen Anwendungsgebieten auftauchen wie bei

- Erdbebenmodellen, die auf die Catalan-Rekursion führen [2],
- steganographischer Verschlüsselung mit Voronoi-Delaunay Triangulation und Catalan Objekten [9] oder
- Bild-Verschlüsselung mit S-boxes, Catalan Zahlen und Elliptischen Kurven [1].

Geschichte

Zur Geschichte, die ausführlich im Buch von Koshy zu finden ist, hier nur fünf Stichpunkte [6].

- Im 18. Jahrhundert schon durch Antu Ming (1692-1763) in China (bzw. der Mongolei) im Zusammenhang mit trigonometrischen Additionstheoremen entdeckt [7].
- Der Name *Catalan-Zahlen* hat nichts mit Katalonien zu tun, sondern geht auf den belgischen Mathematiker Eugéne Charles Catalan (1814-1894) zurück [6].
- Die Catalan-Zahlen sind eines der 100 Probleme aus „Triumpf der Mathematik "von Heinrich Dörrie, 1932 [5].
- Richard P. Stanley, der Autor von „Enumerative Combinatorics" sammelt Probleme, die zu Catalan Zahlen führen [10].
- Catalan Zahlen und die Berechnung von C_{10^6} mit J in 13 Kurzvideos auf Youtube durch Bob Therriault [12].

Fazit

Wenige mathematische Themen haben so verschiedenartigen Anwendungen wie die Catalan-Zahlen und sind zugleich so anschaulich und elementar verständlich. Daher eignen sie sich ausgezeichnet für didaktische Lernprojekte.

Literaturverzeichnis

[1] **Arshad, B.; Ehatisham-ul-Haq, M.; Hussain, Z., Asghar, A.** *A novel approach for designing secure substitution boxes based on Catalan number and elliptic curve* Multimedia Tools and Applications (2024) 83:10409-10425, https://doi.org/10.1007/s11042-023-15971-0.

[2] **Bialecki, M.**: *Stochastic Process Leading to Catalan Number Recurrence*, Mathematics 2023, 11, 4953. https://doi.org/10.3390/math11244953.

[3] **Črepinsek, M.; Mernik, L.**: *An Efficient Representation for Solving Catalan Number Related Problems*, Int. J. Pure and Appl. Math., Vol 56, No 4., 2009.

[4] **Davis, T.**: *Catalan Numbers*, http://www.geometer.org/mathcircles, 2016.

[5] **Dörrie, H.**: *Triumph der Mathematik*, Ferdinand Hirt Breslau, 1933.

[6] **Koshy, T.**: *Catalan Numbers with Applications*, Oxford University Press, 2009.

[7] **Larcombe, P.J.**: *The 18th Century Chinese Discovery of the Catalan Numbers*, Mathematical Spectrum 1999/2000 Vol 32 No 1

[8] **Mays, M.E.; Wojciechowski, J.**: *A Determinant Property of Catalan Numbers*, https://math.wvu.edu/~jwojciec/research/21catalan.pdf

[9] **Selimović, F.; Stanimirović, P.; Saravević, M.; Krtolica, P.**: *Application of Delaunay Triangulation and Catalan Objects in Steganography*, Mathematics 2021, 9, 1172. https://doi.org/10.3390/math9111172.

[10] **Stanley, R.** *Catalan Numbers*, Cambridge University Press 2015.

[11] **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences** *Catalan numbers*, https://oeis.org/A000108

[12] **Therriault, B.** *Catalan Lab*
https://www.youtube.com/playlist?
list=PL275xqeqDUOiOQb8Vic-E_ocq10EC_ELQ.

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Markus Schmidt-Gröttrup
Fakultät Management und Technik
Hochschule Osnabrück
Kaiserstraße 10c
D-49809 Lingen (Ems)
E-Mail: msg@hs-osnabrueck.de

Dieter Schott

Zur logischen Struktur der Sprache

Zusammenfassung: Bearbeiteter Textauszug aus dem noch unveröffentlichten zweiten Teil der Frege-Romanbiografie ‚Gottlob Frege. Der Aristoteles aus Mecklenburg' der Autoren Edith Framm, Joachim Framm und Dieter Schott [1].

Gottlob Frege hing einmal wieder seinen Gedanken nach. Er verglich die Entwicklung der Arithmetik gern mit einem Baum, der sich oben in eine stattliche Anzahl von Methoden und Lehrsätzen entfaltet, während die Wurzel in die Tiefe strebt, um die Standfestigkeit zu sichern. Der Wurzeltrieb ließ aber seiner Meinung nach sehr zu wünschen übrig. Selbst in der algebraischen Logik des Herrn Schröder gewann doch bald der Wipfeltrieb die Oberhand, bevor die Wurzel größere Tiefe erreichte.

Frege überlegte manchmal, was wohl in den Köpfen dieser Wissenschaftler vorging, die ihn entweder herabsetzten oder nicht zur Kenntnis nahmen. Desinteresse an der mühevollen Grundlegung? Festhalten am gewohnten Denken? Unbehagen vor der möglichen eigenen Zurücksetzung? Neid auf den Erfolg eines anderen? Wahrscheinlich spielte alles eine Rolle. Menschen waren komplizierte Wesen, komplizierter noch als seine Arbeit am Grundgebäude der Mathematik.

In Vorbereitung auf die ‚Grundgesetze' schrieb Frege 1891 eine kleine Abhandlung über ‚*Function und Begriff*'. Wichtig war ihm die Unterscheidung von Funktion und Funktionswert schon in der Bezeichnung. Das wurde leider im Allgemeinen nicht bedacht. Daneben spielte der *Wertverlauf* von Funktionen f eine Rolle, bei dem den Argumenten x ihre Werte f(x) zuordnet werden.

ERLÄUTERUNG
Bei Frege enthielt eine mathematische Funktion *f(.)* zunächst eine Leerstelle oder einen Platzhalter für Argumente. Setzt man nun Argumente x ein, entstehen die Funktionswerte $y = f(x)$. Die Paare (x, y) bilden dann den *Wertverlauf* der Funktion, für den Frege sogar eine eigene Bezeichnung einführte, um Verwechslungen mit der Funktion selbst zu vermeiden. Schon in der ‚Begriffsschrift' betrachtete er aber auch allgemeinere, *logische* Funktionen *F(.)*, bei denen die Argumente Gegenstände G sind, deren Werte $u = F(G)$ entweder ‚ja/wahr' oder ‚nein/falsch' lauten. So gehört zur Funktion F der von den Paaren (G, u) gebildete Wertverlauf, den Frege als Gegenstand ansah.

Als weiteren Zwischenschritt veröffentlichte Frege 1892 zwei kleinere Arbeiten in philosophischen Zeitschriften, und zwar ‚*Ueber Sinn und Bedeutung*' und ‚*Ueber Begriff und Gegenstand'*. Beide enthielten schon im Titel wichtige sprachliche Unterscheidungen auf dem Weg zu seinem großen Vorhaben.

Im Laufe der Arbeit an den ‚Grundgesetzen der Arithmetik' waren sogar Ergänzungen zur Begriffsschrift erforderlich geworden. Da Frege sich genötigt sah, neben Begriffen auch deren Umfänge einzuführen, wurde dafür ein eigenes Symbol gebraucht. Den Umfang eines Begriffes fasste er ja als *Wertverlauf* der zugehörigen logischen Funktion auf. Unter den Begriff ‚Quadratwurzel aus Vier' fallen die Gegenstände 2 und -2. Die entsprechende logische Funktion liefert im Ausdruck $x^2 = 4$ für diese beiden Zahlen ‚wahr', für alle anderen ‚falsch'. Das ist der Wertverlauf dieses Begriffes.

Weiterhin war dem Umstand Rechnung zu tragen, dass Gegenstände verschieden bezeichnet werden, aber dennoch gleich sind. In der Mathematik treten häufig verschiedene Ausdrücke auf, die den gleichen Inhalt haben, im einfachsten Fall etwa $2+3$ und $1+4$. Sie haben einen jeweils verschiedenen Sinn, aber die gleiche Bedeutung. Hier ist es die Zahl 5, nicht als Zeichen, sondern als Gegenstand. Auch die Ausdrücke ‚Morgenstern' und ‚Abendstern' stehen für denselben Gegenstand, den Planeten Venus. Deren Bedeutung ist also gleich. Dennoch weisen diese Ausdrücke bezüglich der Beobachtungszeit am Himmel auf einen jeweils anderen Sinn hin.

Gottlob Frege formte weiter an seinen Gedankengebäuden. Er schrieb und las, bedachte gründlich mögliche Argumente und Gegenargumente der Fachwelt. Ein großes Werk würde entstehen, trotz aller Widerstände. Wenn es gelegentlich zügig voranging, erfüllte ihn danach eine tiefe innere Freude.

ERLÄUTERUNG
Frege betont, dass *Gegenstände* keine *Begriffe* sind, sie fallen unter Begriffe. So ist ‚eine Quadratwurzel aus 4' nicht dasselbe wie der Begriff ‚Quadratwurzel aus 4'. Wenn man aber vom *Begriff* ‚Quadratwurzel aus 4' redet, macht man ihn wiederum zum Gegenstand. Das ist sprachlich schwer auseinanderzuhalten, aber in der Logik wohl zu unterscheiden. Darüber hinaus gibt es *Begriffe höherer Ordnung*, also Begriffe von Begriffen, und so weiter.

ERLÄUTERUNG
Sinn und *Bedeutung* eines Namenswortes oder eines Satzes sind nach Frege ebenfalls verschieden. Die Bedeutung eines Namenswortes ist der Gegenstand, den er bezeichnet. Der Sinn ist seine Kennzeichnung oder Darstellung. Die Bedeutung eines Satzes ist sein Wahrheitswert. Der Sinn ist der Gedanke, der durch ihn ausgedrückt wird. In der Gleichung $2^2 = 2 + 2$, die einen mathematischen Satz beschreibt, haben die Zeichen 2^2 und $2 + 2$ einen jeweils verschiedenen Sinn. Ihre Bedeutung ist die Gleiche. Beide stellen die Zahl 4 dar, die man zudem römisch als IV oder dual als 100 schreiben kann. Die Gleichung selbst hat den Sinn, einen Zusammenhang zwischen Zahlausdrücken herzustellen. Ihre Bedeutung ist jedoch, dass sie zu bejahen (d. h. wahr bzw. erfüllt) ist.

Der Philosoph Edmund Husserl aus Halle machte mit psychologischen Analysen zum Zahlbegriff auf sich aufmerksam. Bereits im Jahre 1891 erhielt Frege von Husserl einige Schriften, unter anderem dessen ‚Philosophie der Arithmetik‘und dessen Rezension zu Ernst Schröders ‚Vorlesungen über die Algebra der Logik‘. Im Gegenzug schickte Frege ihm seine ‚Begriffsschrift‘, damit zusammenhängende Artikel und ‚Function und Begriff‘. Husserl äußerte sich dazu lobend und beschaffte sich noch weitere Schriften Freges. Die gute Beziehung kühlte etwas ab, nachdem Frege eine Rezension zu ‚Philosophie der Arithmetik‘ verfasst hatte. Darin wird die psychologistische Grundhaltung Husserls bezüglich der Arithmetik heftig kritisiert. Husserl fand aber Freges Argumente einleuchtend und näherte sich danach Freges Standpunkt an.

Literaturverzeichnis

1. Framm, E.; Framm, J.; Schott, D.: Gottlob Frege. Der Aristoteles aus Mecklenburg. Romanbiografie. Zweiter Teil. Unveröffentlichtes Manuskript.

Autor

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D-23966 Wismar
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

NOTIZEN

NOTIZEN

Anhang

WFR - Wismarer Frege-Reihe / Wismar Frege Series

Beiträge zur Mathematikausbildung von Ingenieuren

Heft 01/2005	Proceedings 4. Workshop Mathematik für Ingenieure, Bremen, Oktober 2005.
Heft 05/2006	Proceedings 5. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Teile 1 – 3, September 2006.
Heft 01/2007	Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Humboldt-Universität Berlin, Teile 1 – 2, März 2007.
Heft 02/2007	Mathematik für Ingenieure – Thesen zum Jahr der Mathematik 2008, Dezember 2007. Mathematics for Engineers – Theses to the Year of Mathematics 2008, December 2007.
Heft 03/2008	Proceedings 6. Workshop Mathematik für Ingenieure, Soest, Teile 1 – 2, September 2008.
Heft 04/2008	Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Teile 1 – 2, September 2008.
Heft 03/2009	Peter Junglas: Interaktive Simulationsprogramme zur Demonstration von klassischen und quantentheoretischen Wellenphänomenen, Juni 2009.
Heft 04/2009	Proceedings 7. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wolfenbüttel, Juni 2009.
Heft 02/2010	Information – Programme and Abstracts, 15th SEFI MWG Seminar & 8th Workshop GFC, Wismar, June 2010.
Heft 03/2010	Proceedings 8. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Juni 2010.
Heft 05/2010	Larissa Fradkin: Teaching Algebra and Calculus to Engineering Entrants, December 2010.
Heft 02/2011	Proceedings 9. Workshop Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, Wilhelmshaven, September 2011.
Heft 03/2013	Proceedings 11. Workshop Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, Teile 1 – 2, Bochum, September 2013.

Heft 02/2015	Proceedings 12. Workshop Mathematik für Ingenieure, Teile 1 – 2, Hamburg, Februar 2015.
Heft 04/2016	Proceedings 13. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Lingen, September 2016.
Heft 01/2017	Proceedings 14. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Erlangen, September 2017.
Heft 01/2018	Sergiy Klymchuk: Puzzle-Based Learning in Engineering Mathematics: Students' Attitudes.
Heft 02/2018	Proceedings 1st Northern-Light Symposium on Engineering Education, Hamburg, April 2018.
Heft 02/2019	Proceedings 15. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Rostock-Warnemünde, April 2019.
Heft 03/2019	Proceedings 2nd Northern-Light Symposium on Mathematical Education in Engineering, Hamburg, September 2019.
Heft 02/2020	Proceedings 16. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Dortmund, Mai 2020.
Heft 01/2022	Das Mathematikabitur von Gottlob Frege. Dezember 2020.
Heft 03/2022	Proceedings 3rd Northern-Light Symposium on Mathematical Education in Engineering, Wismar, September 2022.
Heft 01/2023	Proceedings 4th Northern-Light Symposium on Mathematical Education in Engineering, Hamburg, September 2023.
Heft 02/2023	Proceedings 18. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Bochum, November 2023.
Heft 03/2024	Proceedings 19. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Bielefeld, September 2024.
Heft 04/2024	Proceedings 5th Northern-Light Symposium on Mathematical Education in Engineering, Diepholz, November 2024.

Hinweise:

- Die Proceedings zur Workshop-Reihe beginnen erst mit dem 4. Workshop.
- Die Proceedings zum 10. Workshop erschienen in einem Extraband an der Hochschule Ruhr/West in Mülheim.
- Die Proceedings zum 17. Workshop sind bisher nicht erschienen.

Herausgeber und Redakteur

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Gottlob-Frege-Zentrum
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D - 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)381 / 692845
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 7130
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Vertrieb:
Direkt über den Herausgeber oder das Gottlob-Frege-Zentrum der Hochschule

ISSN 1862-1767